

DOI: 10. 19650/j. cnki. cjsi. J2412842

基于面积坐标形函数的阵列天线变形检测方法*

关迪¹, 陈鸣¹, 商晨², 冷国俊¹

(1. 电磁空间安全全国重点实验室 成都 610036; 2. 西安电子科技大学机电工程学院 西安 710071)

摘要:本研究针对薄板变形的畸变问题,提出了基于面积坐标形函数的重构方法。不同于传统的基于雅克比矩阵的等参转换方法,该方法引入面积坐标作为等参坐标与笛卡尔坐标之间的过渡,确保线性转换关系和形函数的二阶完备性。消除了等参转换中因单元畸变造成的精度下降隐患,增强了复杂结构变形重构模型的普适性。并考虑到工程实际中的传感器粘贴限制,基于经典 Kirchhoff 板的一阶剪切变形理论,提出了单面应变的重构方法。通过建立多目标粒子群优化模型,得到传感器单面布置的最优方案。在天线结构模型的仿真和实验验证中,最大变形 60 mm 时,均方根误差 RMSE 为 0.72 mm,百分比误差 PD 为 2.89%。该方法实现了天线结构变形的高精度重构,有望应用于可变形天线结构的设计制造中。

关键词: 天线结构; 变形重构; 单元畸变; 边界元理论

中图分类号: TH89 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 420.40

Array antenna deformation detection method based on area coordinate shape functions

Guan Di¹, Chen Ming¹, Shang Chen², Leng Guojun¹

(1. National Key Laboratory of Electromagnetic Space Security, Chengdu 610036, China;

2. School of Electro-Mechanical Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: To address the distortion issues of the thin plate deformation reconstruction, this study developed a quadrilateral element model based on the area coordinate shape function. Unlike the traditional isoparametric transformation method reliant on the Jacobian matrix, this approach introduces area coordinates as an intermediary between isoparametric and Cartesian coordinates. This ensures linear conversion and second-order completeness of shape functions, eliminating precision degradation caused by element distortion in isoparametric transformations and enhancing the model's adaptability for complex structures. Considering the practical limitations of sensor placement, the study also presents a reconstruction method based on single-surface strain, grounded in the first-order shear deformation theory of classical Kirchhoff plates. By developing a multi-objective particle swarm optimization model, the optimal sensor layout for single-surface arrangement was determined. Simulation and experimental validation on an antenna structure model demonstrated that with a maximum deformation of 60 mm, the root mean square error (RMSE) was 0.72 mm, and the percentage error (PD) was 2.89%. This method achieved high-precision deformation reconstruction of antenna structures and shows promise for application in the design and manufacturing of deformable antenna structures.

Keywords: antenna structure; deformation reconstruction; distortion elements; boundary element theory

0 引言

作为相控阵雷达系统的核心组成部分,阵列天线对雷达探测的精度和可靠性发挥着至关重要的作用。为了

提升空中平台的探测距离和跟踪能力,阵列天线需要与飞机表面高度集成,这对阵列结构的高柔性和轻量化提出了新要求^[1]。特别是在复杂气动载荷作用下,阵列天线更易发生形变,严重影响其电磁性能。为此,主动电磁补偿概念应运而生^[2]。该方法通过实时感知阵列天线的

收稿日期:2024-05-15 Received Date: 2024-05-15

* 基金项目:国防科工局重大基础科研项目(JCKY2023210A004)资助

空间位姿,在线调整天线单元的激励相位,从而实现对抗线形变的实时补偿。在未来的发展中,这种智能补偿技术将成为确保空基预警平台性能的重要手段。

由于非接触式测量方法受环境干扰、测量距离和动态场景影响,难以实现阵列天线变形的实时动态追踪,因此,通过离散应变响应实时重构结构变形场的接触式测量方法成为研究热点。其中,FBG 光纤光栅传感器因其质量轻、抗腐蚀、抗电磁干扰而备受青睐^[3]。目前,国内外的形状感知方法主要分为3类:模态法、Ko法和逆有限元法。模态法^[4-5]依赖高精度有限元模型获取的模态信息,但实验获取的模态振型信息不适合在线使用。Ko法^[6-7]使用分段线性化思想和离散应变积分方法,建立应变和挠度的关系,但未解决传感器数据失真导致的计算精度下降问题。并且前两种方法都需要充分的先验知识,比如材料属性、外载荷信息等,对于工程实践中的复杂结构来说,这些均无法获取。

因此,美国NASA兰利研究中心的Tessler等^[8-9]提出了第3类方法—逆有限元法,该方法无需先验知识,适用于各种复杂结构的变形感知。逆有限元法利用实测应变和理论应变建立最小二乘变分方程^[10],实现模型的三维变形场重构。该方法不仅在板^[11]、壳^[12]、梁^[13]等基础单元和复合、夹层结构上实现了变形重构监测,而且在飞行器、船舶、桥梁等工程结构上实现了形状感知和损伤鉴定。Gherlone等^[14-15]基于铁木辛柯梁理论和Mindlin中厚板理论,研究了翼型板的三维变形场感知。陈康宇等^[16]提出了基于依存插值函数的非奇异变形重构模型,改进的单元积分方法有效解决了复杂翼型结构变形感知中的病态问题。接着,Belur等^[17]提出了用快速傅立叶变换处理全场位移解的逆有限元法,实现了仅通过传感器网络预测固有频率、了解损坏情况的功能。Dong等^[18]提出了基于位移梯度的变尺寸方法,解决了每个逆单元的优化问题,在少量单元的基础上实现了高效实时监测。除了开发基础单元实现板壳变形感知外,还有学者将目光聚焦到了优化传感器布局^[19]。比如Zhao等^[20]提出了基于特征值分析的光纤光栅传感器模型最优布局模型,并通过粒子群优化求解。

然而,现有的变形重构方法对单元畸变问题研究较少,未解决等参转换在单元畸变时产生的位移场完备性缺失问题,且在工程实践中,传感器无法对称粘贴在结构内外表面。因此,本文提出了针对单元畸变的逆边界元重构模型。首先,针对畸变单元,推导基于面积坐标的高阶形函数,保障在应变矩阵中使用显式积分,获得畸变单元的精确解。其次,针对传感器单面粘贴问题,提出基于边界层的表面应变和实测值的最小二乘模型,并建立多目标粒子群优化模型,得到传感器单面布置的最优方案。最后,以某阵列天线结构为例,通过数值仿真和实验验证,

有效解决了畸变单元计算不准确的问题和传感器单面粘贴的难题。

1 变形重构方法

1.1 基于边界元法的理论应变

逆有限元法通过建立离散应变与理论应变之间的最小二乘模型,实时计算结构的静态和动态位移场。然而,传统逆有限元法需在结构的上下表面粘贴传感器,这在工程实践中并不总是可行。为此,本文基于单面离散应变提出了一种新型形状感知方法。

以经典Kirchhoff板的一阶剪切变形理论为例,板内任意一点的变形场可表示为:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_0 + z \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_y(x, y, z) &= v_0 - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_z(x, y, z) &= w_0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中,表面任意一点的位移 $\mathbf{u} = [u_x, u_y, u_z]$ 由中性面变量组成,包括沿3个方向的位移(u_0, v_0, w_0)和中性面沿 x 轴和 y 轴正向的转角 $\frac{\partial w}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial w}{\partial y}$ 。

如图1所示,根据边界元理论建立三维变形场,选择板单元的上、下表面为边界面,缩放中心 $O_1(x_o, y_o, z_o)$ 与全局坐标系原点重合。板内一点 $X(x, y, z)$ 的几何位置可用节点坐标(x_i, y_i, z_i)与相应的插值形函数 N_i 表示,如式(2)。其中形函数的推导公式见第2章。

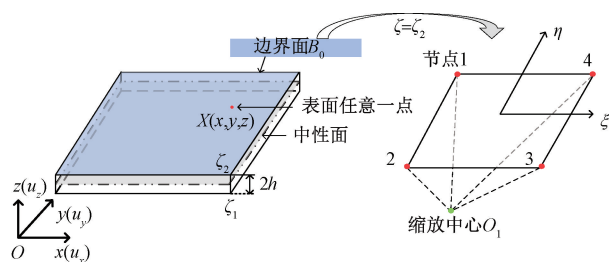


图1 四边形板单元结构

Fig. 1 The geometric model of quadrilateral plate structure

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta, \zeta) &= x_o + \zeta \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta, \zeta) &= y_o + \zeta \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \\ z(\xi, \eta, \zeta) &= z_o + \zeta \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i \end{aligned} \quad (2)$$

根据线弹性应变-位移理论,板单元的表面应变场如式(3)所示。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}]^T =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{u}^e \quad (3)$$

式中: $\mathbf{L}$ 表示微分算子; $\mathbf{u}^e$ 表示位移变量。

而全局直角坐标系下的微分算子可以通过引入雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 求解:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中,雅可比矩阵 $\mathbf{J}$ 内的每一项可以表示为:

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \xi} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \eta} = s \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) z_i \quad (5)$$

将式(5)带入式(3),可将微分算子 $\mathbf{L}$ 表示为局部坐标的形式:

$$\mathbf{L} = b_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta} \left(b_2 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) =$$

$$\frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{A}_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{\zeta} \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{A}_2 \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\zeta} \frac{1}{|\mathbf{J}|} \mathbf{A}_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (6)$$

其中, $\mathbf{A}_1$ 、 $\mathbf{A}_2$ 和 $\mathbf{A}_3$ 表示形函数相对于局部坐标的偏导数,可以写作:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & b_{21} & b_{31} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{11} & 0 & b_{31} \\ 0 & 0 & b_{31} & 0 & b_{11} & b_{21} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 & 0 & b_{22} & b_{32} & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & b_{12} & 0 & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{32} & 0 & b_{12} & b_{22} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} b_{13} & 0 & 0 & b_{23} & b_{33} & 0 \\ 0 & b_{23} & 0 & b_{13} & 0 & b_{33} \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & b_{13} & b_{23} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

其中,

$$b_{11} = y, \eta z, \xi - z, \eta y, \xi b_{12} = y, \xi z, \xi - z, \xi y, \xi b_{13} =$$

$$y, \xi z, \eta - z, \xi y, \eta$$

$$b_{21} = x, \eta z, \xi - z, \eta x, \xi b_{22} = x, \xi z, \xi - z, \xi x, \xi b_{23} =$$

$$x, \xi z, \eta - z, \xi x, \eta$$

$$b_{31} = x, \eta y, \xi - y, \eta x, \xi b_{32} = x, \xi y, \xi - y, \xi x, \xi b_{33} =$$

$$x, \xi y, \eta - y, \xi x, \eta \quad (8)$$

1.2 单面测量应变与变形重构模型

参考材料力学中任意方向的应变与3个方向应变分量的关系,可以将 Oxy 平面内任意方向的应变写为:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^m(x, y, \theta) = [\cos^2 \theta \quad \sin^2 \theta \quad -\cos \theta \sin \theta]$$

$$[\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T = t_{,\theta} [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T \quad (9)$$

由于垂直于中平面 ε_{zz} 的应变在平面应变问题中可以忽略不计,因此应变场是面内应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^m = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \gamma_{xy}\}^T = \mathbf{L}_1 \mathbf{u}^e$ 和横向剪切应变 $\boldsymbol{\varepsilon}^s = \{\gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}^T = \mathbf{L}_2 \mathbf{u}^e$ 的组合。

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}^e) = \boldsymbol{\varepsilon}^m(x, y, \theta) = t_{,\theta} \mathbf{L}_1 \mathbf{u}^e \quad (10)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}^e) = \{\boldsymbol{\varepsilon}^s(x, z, \beta), \boldsymbol{\varepsilon}^s(y, z, \lambda)\}^T = t_{,\theta} \mathbf{L}_2 \mathbf{u}^e \quad (11)$$

得到理论面内应变 $\mathbf{e}(\mathbf{u}^e)$ 和理论横向剪切应变 $\mathbf{g}(\mathbf{u}^e)$ 的表达式后,根据最小二乘变分原理,建立理论应变和实测应变 $(\mathbf{e}^*, \mathbf{g}^*)$ 的最小二乘函数。

$$\Phi(\mathbf{u}^e) = w_m \|\mathbf{e}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{e}^*\|^2 + w_g \|\mathbf{g}(\mathbf{u}^e) - \mathbf{g}^*\|^2 \quad (12)$$

其中, w_m 和 w_g 表示相应的权重系数。当有实际测量结果时, w_m 和 w_g 均为恒正的加权常数且被赋值为1,在缺少或无法检测到数据的情况下,加权常数则被赋予一个极小值。该值的选择原则是降低数据缺失对计算结果的影响。本文选择常数的标准参考了经典逆有限元文献^[11,15,21-23],其范围在 10^{-4} 至 10^{-7} 。计算分析表明,加权常数的变化对结果的影响最小。因此,本文选择 10^{-7} 是合理的。

求式(12)关于节点自由度 $(\mathbf{u}^e)$ 的偏导数,可得到:

$$\mathbf{k}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (13)$$

在单元中, $\mathbf{k}^e$ 和 $\mathbf{f}^e$ 具体表达为式(14)和(15)。

$$\mathbf{k}^e = w_m \sum_{i=1}^n (B_i^m)^T t_{,\theta_i} (B_i^m) + w_g \sum_{i=1}^n (B_i^g)^T (B_i^g) \quad (14)$$

$$\mathbf{f}^e = w_m \sum_{i=1}^n (B_i^m)^T t_{,\theta_i} \boldsymbol{\varepsilon}^m(x_i, y_i, \theta_i) \quad (15)$$

其中, $t_{,\theta_i}$ 表示传感器的粘贴角度。

式(13)是一个逆有限元单元的重构方程,将多个逆单元拼接起来,得到整个结构的变形重构方程:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (16)$$

其中, $\mathbf{K}$ 表示类刚度矩阵,是关于 FBG 传感器的分布位置的函数;向量 $\mathbf{F}$ 是关于逆有限元单元实测应变值的函数,节点向量 $\mathbf{U}$ 则可以通过反解得到。

由于刚体模态的存在,全局类刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 是奇异的,

需要添加边界条件。因此,式(16)中的非奇异矩阵和向量可以简化为式(17):

$$\bar{K}\bar{U} = \bar{F} \quad (17)$$

1.3 畸变单元的形函数

传统的逆有限元法常采用雅可比矩阵构造等参转换,然而在形函数对笛卡尔坐标的偏导数中,出现了雅可比矩阵的逆。如式(18),由于 J 的行列式在分母位置,雅可比矩阵的逆只能通过数值积分近似求解^[24]。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (18)$$

此外, Lee 等^[25]证明高次项 $\xi^2\eta^2$ 的存在提供了畸变单元中二次位移场的精确表达。因此,需要通过引入面积坐标,建立等参坐标与笛卡尔坐标之间的联系。这不仅保证了面积坐标与笛卡尔坐标之间的线性转换关系,而且保证了形函数具有高阶项。此外,形函数可以用插值多项式表示,因此可以在应变矩阵中使用显式积分,以获得畸变单元的精确变形解。

如图2所示,凸四边形单元中任意点 $P(x, y)$ 由面积坐标 L_1, L_2, L_3 和 L_4 确定,其定义如式(19), S 是四边形1234的面积, S_i 分别是三角形 $P23, P34, P41$ 和 $P12$ 的面积。

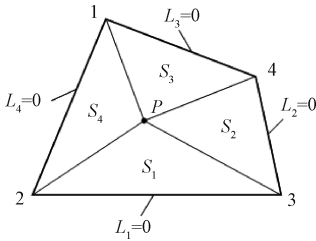


图2 四边形面积坐标的定义

Fig. 2 The definition of quadrilateral area coordinates

$$L_i = \frac{S_i}{S} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

式(19)的4个面积坐标也可以表示为:

$$L_i = \frac{1}{2S}(l_i + m_i x + n_i y) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$

式中: l_i, m_i ,和 n_i ,可以表示为4个节点 (x_i, y_i) 的笛卡尔坐标的组合,如下:

$$\begin{aligned} l_i &= x_j y_k - x_k y_j, \quad m_i = y_j - y_k, \quad n_i = x_k - x_j \\ (i, j, k &= 1234) \end{aligned} \quad (21)$$

4个无量纲参数 $g_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 可以用面积坐标表示,如式(22)。

$$g_1 = \frac{S'}{S}, \quad g_2 = \frac{S''}{S}, \quad g_3 = 1 - g_1, \quad g_4 = 1 - g_2 \quad (22)$$

其中, S' 和 S'' 分别为三角形124和三角形134的面积。由于存在两个相互独立的无量纲参数 g_1 和 g_2 ,因此面积坐标 L_i 必须满足两个独立方程^[26]:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1 \quad (23)$$

$$g_1 g_2 L_2 - g_2 g_3 L_3 + g_3 g_4 L_4 - g_4 g_1 L_1 = 0 \quad (24)$$

此时,面积坐标 L_i 可以在等参坐标系 (ξ, η) 中用插值多项式来表示:

$$L_1 = \frac{1}{4}(1 + \eta)[g_2(1 - \xi) + g_3(1 + \xi)]$$

$$L_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)[g_3(1 - \eta) + g_4(1 + \eta)]$$

$$L_3 = \frac{1}{4}(1 - \eta)[g_4(1 + \xi) + g_1(1 - \xi)]$$

$$L_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)[g_1(1 + \eta) + g_2(1 - \eta)]$$

同时,节点位移场可以写成基于面积坐标 $L_i(\xi, \eta)$ 的二阶插值多项式,据此,形函数 $N_i(\xi, \eta)$ 可表示如下:

$$N_i(\xi, \eta) = -\frac{g_k}{2} + L_i + L_j + \xi_i \eta_i g_k P \quad (26)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 1; k = 3, 4, 1, 2)$$

其中, P 可以用面积坐标和无量纲参数表示:

$$P = \frac{3(L_4 - L_2)(L_1 - L_3) - (g_3 - g_4)(L_4 - L_2) - (g_2 - g_3)(L_1 - L_3) + \frac{1}{2}(g_3 g_1 - g_2 g_4)}{1 + g_2 g_4 + g_3 g_1} \quad (27)$$

简化形函数,可以在等参坐标系下得到二阶完备多项式:

$$N_i(\xi, \eta) = a_1 + a_2 \xi + a_3 \eta + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2 + a_7 \xi^2 \eta + a_8 \xi \eta^2 + a_9 \xi^2 \eta^2 \quad (28)$$

为得到笛卡尔坐标系下的多项式,需对式(28)进行如下的一阶导数变换:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \\ \frac{\partial}{\partial L_4} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

随后,形函数在笛卡尔坐标系下的一阶导数可具体表示如下:

$$\begin{aligned} N_{i,x} &= \frac{m_i}{2A} + \frac{m_j}{2A} + \frac{\xi_i \eta_i g_k}{2A(1 + g_2 g_4 + g_3 g_1)} \Delta x \\ N_{i,y} &= \frac{n_i}{2A} + \frac{n_j}{2A} + \frac{\xi_i \eta_i g_k}{2A(1 + g_2 g_4 + g_3 g_1)} \Delta y \\ (i &= 1, 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 1; k = 3, 4, 1, 2) \end{aligned} \quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned}\Delta x &= \sum_{p=1}^4 m_p \xi_p \eta_p [3(L_s - L_q) + (g_r - g_p)] \\ \Delta y &= \sum_{p=1}^4 n_p \xi_p \eta_p [3(L_s - L_q) + (g_r - g_p)] \quad (31) \\ (p &= 2, 4, 3, 3; q = 2, 1, 4, 3; r = 3, 3, 2, 4; \\ s &= 4, 3, 2, 1)\end{aligned}$$

2 传感器布局优化模型

2.1 应变-位移矩阵稳定性分析

在使用离散应变反演结构变形的过程中,应变-位移矩阵(式(16))取决于传感器的布局位置和测量值,因此不恰当的传感器布局方案会出现矩阵病态和奇异等问题。同时,需要保证算法的精度和鲁棒性,这在传统的变形场重构方法中尚未提及。针对这些问题,本文提出了建立以重构精度和矩阵鲁棒性为目标的双目标优化模型,采用改进的粒子群算法求解,从而得到传感器的优化布局方案。

式(16)中的节点自由度可以表达为矩阵与应变的函数,如式(32)。

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i) \boldsymbol{\varepsilon}^m \quad (32)$$

其中, $\mathbf{G}$ 是关于传感器粘贴位置 (x_i, y_i) 和角度 (θ_i) 的函数, $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ 是实测应变向量。如式(33),由于存在传感器安装误差 $\Delta \mathbf{G}$ 和测量扰动误差 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$,会导致重构位移场出现偏差,即变形场从 $\mathbf{U}$ 变为 $\mathbf{U}'$ 。

$$\mathbf{U}' = (\mathbf{G} + \Delta \mathbf{G})(\boldsymbol{\varepsilon}^m + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{P}(\boldsymbol{\varepsilon}^m + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (33)$$

如式(34),条件数(cond)是评估矩阵数值稳定性的重要指标。高条件数意味着矩阵数值稳定性较差,即微小的输入误差可能导致显著的输出误差。然而,这一标准主要适用于矩阵求逆的数值计算。在评估矩阵的正交性和特征值分解中,矩阵稳定性的分析需要引入行向量与投影矩阵夹角的数值指标,如式(35)。

$$f_1 = \text{cond}(\mathbf{P}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i)) \quad (34)$$

$$\cos(\varphi_i) = \frac{[\mathbf{s}_i]^T [\mathbf{Q}] [\mathbf{s}_i]}{\|[\mathbf{s}_i]^T\| \|\mathbf{Q}\| \|\mathbf{s}_i\|} \quad (35)$$

其中, $\mathbf{Q} = \mathbf{S}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S}^T$ 是投影矩阵, $\mathbf{s}_i$ 向量是从矩阵 $\mathbf{K}$ 中选择的计算角度, $\mathbf{S}$ 矩阵为除去 $\mathbf{s}_i$ 向量后组成的新矩阵, φ_i 表示正交矩阵 $\mathbf{K}$ 中的行向量与投影矩阵 $\mathbf{Q}$ 的夹角。

根据式(35),正交矩阵的行向量与投影矩阵的夹角越接近零,矩阵 $\mathbf{K}$ 对微小扰动的稳定性越强。因此,基于鲁棒性的目标函数可以写为:

$$f_2(\mathbf{P}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i)) = \min |\sin(\varphi_i)|, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (36)$$

其中, $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i)$ 是传感器粘贴的位置, φ_i 表示正交矩阵 $\mathbf{K}$ 中的行向量与投影矩阵 $\mathbf{Q}$ 的夹角。式(36)是评估

应变-位移矩阵稳定性的重要指标,旨在保证重构方法在传感器安装误差和扰动误差等情况下的鲁棒性。

2.2 传感器优化模型

在工程实际中,由于外载形式复杂多样,因此仅有鲁棒性一条准则是不够的。为了避免较大的变形工况下出现误差吞并等现象,本文引入了其他评估指标,即重构精度的均方根误差 RMSE 和重构精度百分比误差 PD。

$$RMSE = \sqrt{\sum_{i=1}^n (w^{iFEM}(i) - w^{ref}(i))^2 / n} \quad (37)$$

$$PD(w(i)) = \left| \frac{w^{ref}(i) - w^{iFEM}(i)}{w^{iFEM}(i)} \right| \times 100\% \quad (38)$$

式中: $w^{iFEM}(i)$ 是计算变形值; $w^{ref}(i)$ 是实测变形值,在仿真分析中,这部分由仿真软件得到,而在实验中,这部分由第三方测量设备得到。

$$\begin{aligned}\text{Minimize } \mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \theta) &= \\ \max [f_2(\mathbf{P}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i)), f_3 = RMSE] &\end{aligned} \quad (39)$$

$$\text{s. t.}, \mathbf{x} \in [0, a], \mathbf{y} \in [0, b], \theta \in [0, 90^\circ]$$

其中, a 和 b 分别为板单元的长度和宽度。为得到传感器的位置布局,本文提出了建立以重构精度的均方根误差 RMSE 和矩阵鲁棒性 $\mathbf{P}(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \theta_i)$ 为目标的双目标优化模型,如式(39)。

双目标优化问题需要同时考虑两个优化目标,这些目标往往相互制约,使解的质量难以比较。常用的比较解的质量的方法是帕累托支配关系,其定义为:如果 $X, Y \in \Omega, \forall k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有 $F_k(X) \leq F_k(Y)$, 且 $\exists k \in \{1, 2, \dots, m\}$, 有 $F_k(X) < F_k(Y)$, m 是变量维度,则称 Y 被 X 支配,否则 X 和 Y 之间是非支配的关系。因此,该问题的解集是由许多非支配解构成的帕累托前沿(PF)。本文主要描述畸变单元重构模型和双目标优化函数的构建,其优化算法^[27-28]参数设置结果如下:群数量 N 设为 50,迭代次数 T 设为 150,惯性权重 $\omega_{\max} = 1.2, \omega_{\min} = 0.8$ 。

3 实验结果分析

3.1 仿真分析

为验证本文所提出的板单元变形重构方法和双目标优化模型在畸变单元变形重构问题中的有效性,本节进行了有限元仿真分析。使用 ANSYS 软件建立了阵列天线结构模型,模型由固定端、骨架、阵列天线等组成,全部采用 LY12CZ 铝合金制造,组件间为刚性连接。模型包含 798 192 个 4 节点实体单元和 423 657 个节点。相关详细参数如表 1 所示,模型示意图如图 3 所示。

为模拟天线结构在服役状态下受到的空气载荷,实验中使用 5 个均匀布置的液压缸对阵列结构表面施加压力,液压缸顶部与阵列结构通过球铰连接,底部与地面通过转动副连接。

表 1 阵列结构零件材料属性

Table 1 The material properties of array structure parts

组件	厚度/mm	泊松比	弹性模量/GPa	密度/(g·cm ⁻³)
前缘板	0.28	0.3	70	2.78
横梁 2	0.3	0.3	70	2.78
竖梁 4	0.3	0.3	70	2.78

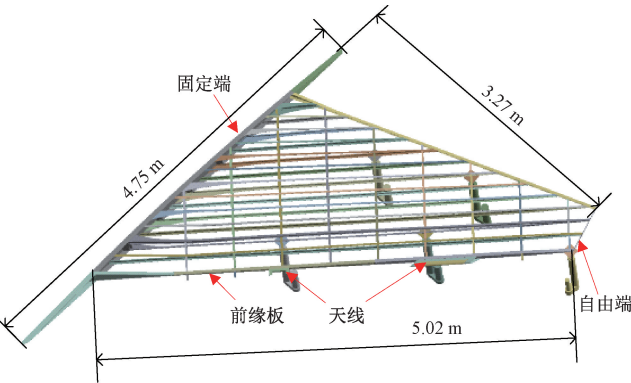


图 3 阵列天线有限元模型

Fig. 3 The finite element model of the array antenna

本文重点分析天线,而前缘板是天线的主要承载结构。因此,只有完成前缘板的变形重构,才能实现天线的变形场重构。具体步骤如下:首先,利用双目标粒子群优化模型,优化提取离散位置的应变,得到应变传感器的布局方案(如表 2 和图 4 所示)。其次,采用单元组装技术重构前缘板的位移场。最后,考虑到阵列天线与前缘板最大距离为 68 mm,通过几何映射关系,得到天线结构的实时变形模型。



图 4 前缘板及阵列天线有限元模型

Fig. 4 The finite element model of the leading edge plate and array antenna

仿真结果显示,ANSYS 仿真得到的变形场分布与变形重构结果一致。然而,随着载荷增大,两者出现一定偏差,误差数值如表 3 所示。在 5 个液压缸同时作用下,仿真提取的 4 个标记点变形值与重构得到的变形值(iFEM 值)对比显示,最大变形为 615.36 mm,最大误差为 2.32 mm,重构精度的均方根误差为 1.87 mm。由于液压缸作用于阵列结构时变形场仅满足 C0 连续性,液压缸附近的前缘板在不同载荷下呈现突变趋势。如图 5 和表 3 所示,本研究提出的基于畸变单元的变形重构方法及基于双目标优化算法得出的单面传感器布局方案展现了良好的精度和稳定性。

表 2 传感器优化位置及粘贴角度

Table 2 Optimized sensor position and paste angle

编号	粘贴角度/(°)	坐标 x/m	坐标 y/m
传感器 1	0	0.559 0	0.045 9
传感器 2	0	0.556 6	0.014 7
传感器 3	0	1.173 1	0.005 2
传感器 4	0	1.173 9	-0.006 0
传感器 5	0	1.595 9	-0.001 8
传感器 6	0	1.594 0	-0.016 6
传感器 7	0	2.139 0	-0.009 2
传感器 8	0	2.140 1	-0.025 1
传感器 9	90	0.676 1	0.025 6
传感器 10	90	1.320 6	0.004 4
传感器 11	90	1.661 4	-0.001 8
传感器 12	90	2.243 0	-0.010 8
传感器 13	45	0.690 94	0.011 1
传感器 14	45	1.337 7	-0.004 5
传感器 15	45	1.660 2	-0.018 3
传感器 16	45	2.240 7	-0.027 4

表 3 变形重构与仿真结果在标记点处对比

Table 3 The comparison of deformation reconstruction and simulation results at marked points

编号	工况 1	工况 2	工况 3	工况 4
ANSYS	-5.42	-36.32	-109.51	-292.54
iFEM 值	-5.36	-35.93	-107.55	-289.38
误差	-0.06	-0.39	-1.96	-3.16
ANSYS	-10.89	-73.13	-221.29	-591.89
iFEM 值	-10.78	-71.96	-220.16	-591.53
误差	-0.11	-1.17	-1.13	-0.36
ANSYS	-4.93	-34.42	-111.57	-303.84
iFEM 值	-5.08	-33.53	-109.53	-301.71
误差	0.15	-0.89	-2.04	-2.13
ANSYS	-10.03	-69.98	-226.38	-615.36
iFEM 值	-10.33	-68.34	-228.39	-613.04
误差	0.30	-1.64	2.01	-2.32
RMSE	1.87			

为检验重构算法的精度和稳定性,本研究根据优化得出的传感器位置计算单元节点的变形值,进而插值得到整个前缘板的变形场。在 4 种不同工况下,提取前缘板和天线上的 20 个标记点,将计算值与 ANSYS 仿真结果对比,仿真结果如图 5 所示。

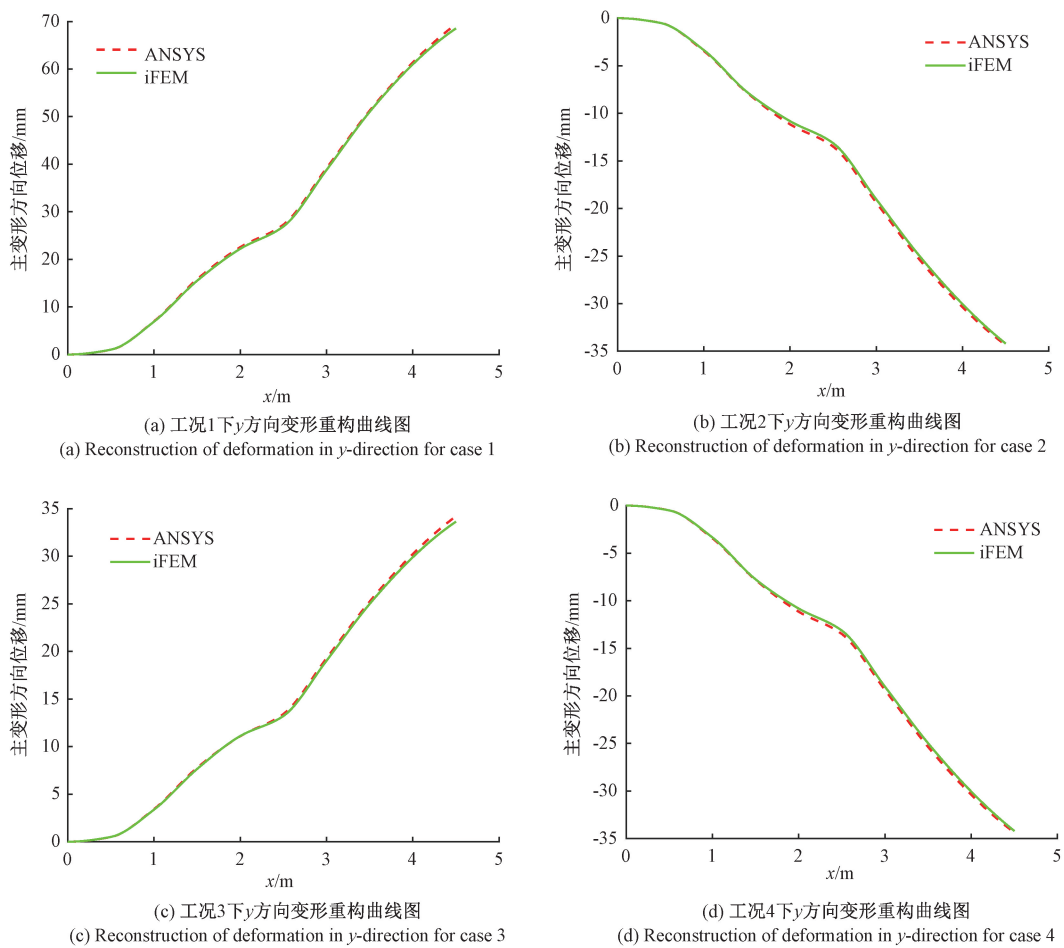


图5 4种工况下前缘板和天线的变形重构结果

Fig. 5 The deformation reconstruction results of the leading edge plate and antenna under four different loading conditions

3.2 实验验证

为评估基于畸变单元的逆有限元法在实际工程中的可靠性,本实验构建了1个与数值仿真相同的阵列天线测试平台。该实物模型在尺寸、材料属性和液压缸位置方面与有限元模型完全一致。

当天线结构受载变形时,粘贴在其表面的光纤光栅传感器(如图6(a)所示)也随之变形,并将变化的波

长信息输入到解调仪(如图6(b)所示,精度3 pm,刷新率100 Hz)中。通过光纤光栅解调系统,可以计算出变形前后的应变值。这些应变值用于重构变形场数据。实测变形场则由中的第三方测量设备NDI(六维动态追踪系统,精度0.1 mm,如图6(c)所示)获取。最终,动态变形场在开发的三维软件中实时显示,实验流程如图7所示。

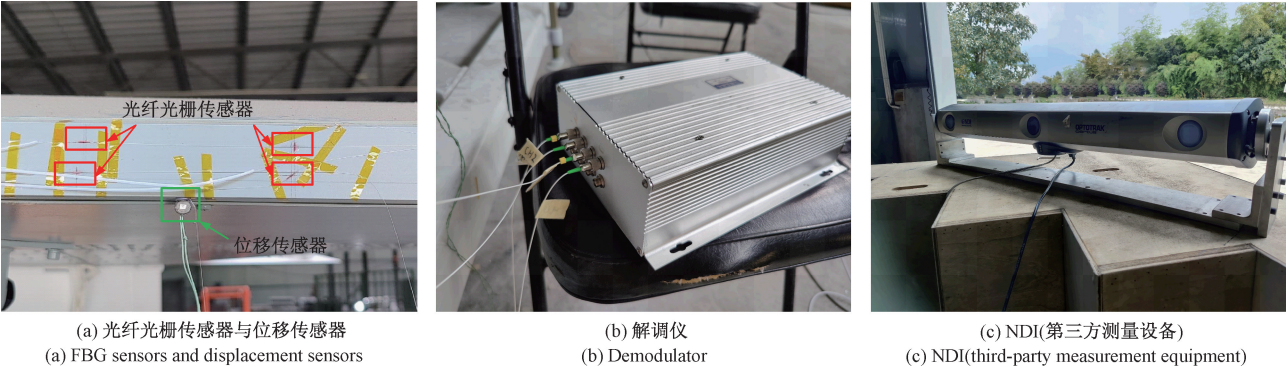


图6 实验平台

Fig. 6 Experimental platforms

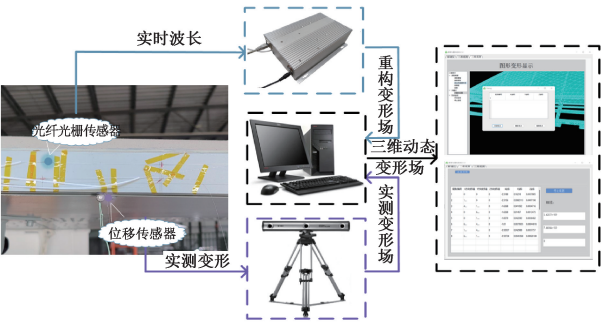


图 7 变形实验流程图

Fig. 7 Experimental flowchart for reconstructing deformation

为证明该方法在天线结构变形实验的精度,本文对 4 种变形工况下的天线结构进行了实时计算,并将主变形方向的实测变形场和重构变形场绘制成平滑过渡的二维曲线(如图 8 所示)。但两条趋势相同,数值接近的变形曲线无法量化本方法的精度,因此列出了重构值与 NDI 测量值,以及相应的 RMSE 和 PD 值,如表 4 所示。

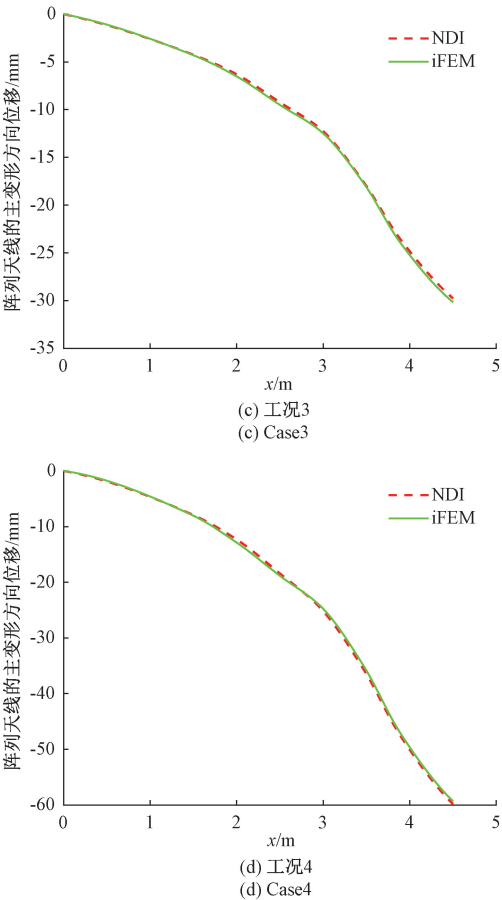
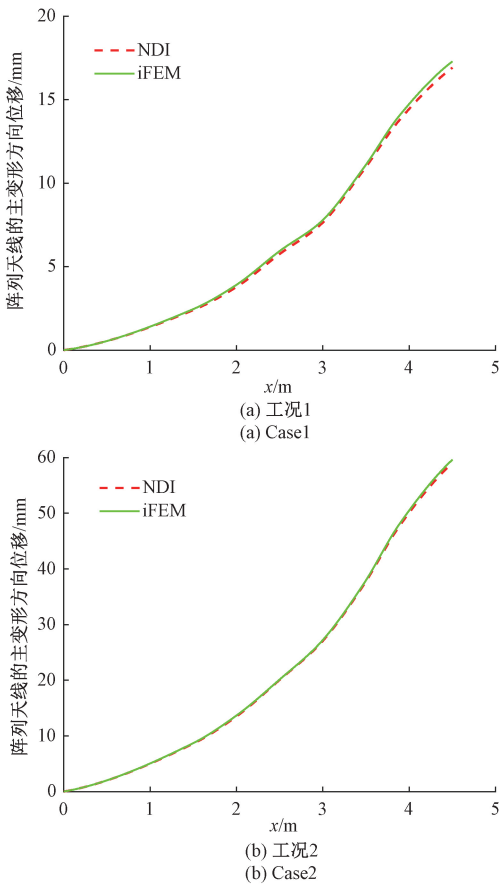


图 8 4 种工况下天线结构主变形方向的重构曲线
Fig. 8 The reconstruction curves of the main deformation direction of the leading edge plate under four loading conditions

如表 4 所示,实验分为向上和向下弯曲两种工况。向上弯曲工况的最大误差为 0.56 mm,均方根误差 RMSE 为 0.63 mm,百分比误差 PD 为 2.57%;向下弯曲工况的最大误差为 0.52 mm,均方根误差 RMSE 为 0.72 mm,百分比误差 PD 为 2.89%。这些结果表明,本方法在不同载荷工况下都具有高精度和高稳定性,适用于各类变形。变形重构完成后,下一步是进行天线指向误差的电性能分析,本文实验部分不对此进行详细描述。

针对大尺寸、复杂结构的阵列天线模型,上述不同工况的数值仿真和实验验证共同证明了本文提出的逆有限元法基于单面离散应变传感器实现了畸变单元变形场的实时重构,且具有较高的精度和稳定性。

表 4 变形重构与仿真结果在标记点处对比

Table 4 The comparison of deformation reconstruction and simulation results at marked points

标记点及误差		1	2	3	4	5	6	7	RMSE	PD
工况 1	NDI	2.39	3.79	5.78	7.50	10.77	13.77	16.89	0.40	1.17%
	重构值	2.45	3.92	5.96	7.65	10.90	14.04	17.27		
工况 2	NDI	8.59	13.53	20.16	26.59	37.08	47.68	58.99	0.63	2.57%
	重构值	8.68	13.69	20.22	26.73	37.27	48.04	59.55		
工况 3	NDI	-4.24	-6.31	-9.27	-12.04	-17.64	-23.51	-29.73	0.41	1.82%
	重构值	-4.29	-6.53	-9.55	-12.26	-17.75	-23.88	-30.13		
工况 4	NDI	-7.91	-12.34	-18.51	-24.70	-35.76	-47.43	-59.78	0.72	2.89%
	重构值	-8.02	-12.90	-18.92	-24.32	-35.12	-46.97	-59.26		

4 结 论

本文针对含畸变单元的薄板结构,提出了一种基于边界面粘贴离散应变传感器的变形感知方法,不仅克服了传感器无法对称粘贴的工程难题,还通过仿真和实验验证了其在天线结构变形监测中的有效性。

1) 分析了畸变单元计算误差的来源,并推导了基于面积坐标的具有二阶完备性的形函数,解决了雅可比矩阵求逆引起的数值积分误差问题;

2) 建立了关于边界层表面应变与实测应变的最小二乘泛函关系,并建立了以重构精度和鲁棒性为目标的多目标粒子群优化模型,确定了光纤光栅传感器的最佳位置和角度,突破了传感器单面粘贴的限制;

3) 通过仿真分析和实验验证,证明所提出的重构模型和多目标优化算法在阵列天线结构中的应用潜力。在未来的研究中,有望将其同机器学习、飞行器结构优化等结合,为自适应变形飞机的设计提供理论支持。

参考文献

[1] 徐聪,郭子林,王学尧,等. 国外预警机发展现状及雷达关键技术研究[J]. 空天预警研究学报, 2023, 37(2): 79-88.

XU C, GUO Z L, WANG X Y, et al. Research on the development status of foreign early warning aircraft and key radar technologies [J]. Journal of Air and Space Early Warning Research, 2023, 37(2): 79-88.

[2] 黄愿. 智能蒙皮天线的形变及其电补偿[D]. 电子科技大学, 2021.

HUANG Y. Deformation and electrical compensation of intelligent skin antenna [D]. University of Electronic Science and Technology of China, 2021.

[3] YAO K, LIN Q J, JIANG ZH D, et al. Design and

analysis of a combined FBG sensor for the measurement of three parameters [J]. IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, 2021, 70: 7003010.

[4] VALORIANI F, ESPOSITO M, GHERLONE M. Shape sensing for an UAV composite half-wing: Numerical comparison between modal method and Ko's displacement theory[J]. Aerospace, 2022, 9(9): 509.

[5] ZHU AN D, GONG X L, ZHOU J, et al. Efficient vibration measurement and modal shape visualization based on dynamic deviations of structural edge profiles[J]. Sensors, 2024, 24(13): 4413.

[6] KO W L, FLEISCHER V T. Further development of KO displacement theory for deformed shape predictions of nonuniform aerospace structures[R]. 2009.

[7] KO W L, RICHARDS W L, TRAN V T. Displacement theories for in-flight deformed shape predictions of aerospace structures[R]. 2007.

[8] TESSLER A, SPANGLER J L. Inverse FEM for full-field reconstruction of elastic deformations in shear deformable plates and shells [C]. 2nd European Workshop on Structural Health Monitoring, 2004.

[9] TESSLER A. A variational principle for reconstruction of elastic deformations in shear deformable plates and shells[M]. National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, 2003.

[10] TESSLER A, SPANGLER J L. A least-squares variational method for full-field reconstruction of elastic deformations in shear-deformable plates and shells[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2005, 194(2/5): 327-339.

[11] NIU SH T, ZHAO Y, BAO H. Shape sensing of plate

- structures through coupling inverse finite element method and scaled boundary element analysis[J]. *Measurement*, 2022, 190: 110676, 1-14.
- [12] WU Z, LI T, ZHANG J, et al. Shape sensing of thin shell structure based on inverse finite element method[J]. *Structural Durability & Health Monitoring*, 2022, 16(1): 1-14.
- [13] CHEN K Y, HE D H, ZHAO Y, et al. A unified full-field deformation measurement method for beam-like structure[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, 71: 1001110, 1-10.
- [14] GHERLONE M, CERRACCHIO P, MATTONE M, et al. Shape sensing of 3D frame structures using an inverse finite element method[J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2012, 49(22): 3100-3112.
- [15] GHERLONE M, CERRACCHIO P, MATTONE M. Shape sensing methods: Review and experimental comparison on a wing-shaped plate[J]. *Progress in Aerospace Sciences*, 2018, 99: 14-26.
- [16] 陈康宇, 保宏, 贺大航, 等. 基于多翼型特征的非奇异变形感知方法研究[J]. *仪器仪表学报*, 2023, 44(1): 101-111.
- CHEN K Y, BAO H, HE D H, et al. Research on the non-singular shape sensing method based on multi-airfoil features[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2023, 44(1): 101-111.
- [17] BELUR M Y, KEFAL A, ABDOLLAHZADEH M A, et al. Damage diagnosis of plates and shells through modal parameters reconstruction using inverse finite-element method[J]. *Structural Health Monitoring*, 2024.
- [18] DONG T Y, YUAN SH F, HUANG T X. Real-time shape sensing of large-scale honeycomb antennas with a displacement-gradient-based variable-size inverse finite element method[J]. *Composite Structures*, 2024, 344: 118320.
- [19] DE SOUZA MELLO F M, PEREIRA J L J, GOMES G F. Multi-objective sensor placement optimization in SHM systems with Kriging-based mode shape interpolation[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2024, 568: 118050.
- [20] ZHAO Y, DU J L, BAO H, et al. Optimal sensor placement based on eigenvalues analysis for sensing deformation of wing frame using iFEM[J]. *Sensors*, 2018, 18(8): 2424.
- [21] KEFAL A, OTERKUS E. Isogeometric iFEM analysis of thin shell structures[J]. *Sensors*, 2020, 20(9): 2685.
- [22] ABDOLLAHZADEH M A, TABRIZI I E, KEFAL A, et al. A combined experimental/numerical study on deformation sensing of sandwich structures through inverse analysis of pre-extrapolated strain measurements[J]. *Measurement*, 2021, 185: 110031.
- [23] SHANG CH, CHEN K Y, NIU SH T, et al. An effective deformation measurement method for distorted elements in Mindlin plates[J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 2022, 71: 4008612, 1-12.
- [24] WILLIAMWEAVER, JOHNSTON P. *Structural dynamics by finite element*[M]. Prentice-Hall, Inc, 1987.
- [25] LEE N S, BATHE K J. Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1993, 36(20): 3553-3576.
- [26] 龙驭球. *新型有限元论*[M]. 北京: 清华大学出版社有限公司, 2004.
- LONG Y Q. *Advanced finite element method in structural engineering*[M]. Beijing: Tsinghua University Press Co., Ltd. 2004.
- [27] ZHAO ZH Y, CHEN K Y, LIU Y M, et al. A large-scale sensor layout optimization algorithm for improving the accuracy of inverse finite element method[J]. *Sensors*, 2023, 23(19): 8176.
- [28] LI X H, NIU SH T, BAO H, et al. Improved adaptive multi-objective particle swarm optimization of sensor layout for shape sensing with inverse finite element method[J]. *Sensors*, 2022, 22(14): 5203.

作者简介



关迪, 2006年于西北工业大学获学士学位, 2010年于西北工业大学获硕士学位, 2014年于西北工业大学获博士学位, 现为电磁空间安全全国重点实验室高级工程师, 研究方向为电子信息系统总体设计。

E-mail: guanfei5013@126.com

Guan Di received his B. Sc. Degree, M. Sc. degree and Ph. D. degree all from Northwestern Polytechnical University in 2006, 2010 and 2014, respectively. He is currently a senior engineer at the National Key Laboratory of Electromagnetic Space Security,

and his research direction is the overall design of electronic information systems.



陈鸣,2002 年于中国科学技术大学获得学士学位,2007 年于中国科学技术大学获得博士学位,现为电磁空间安全全国重点实验室正高级工程师,主要研究方向为电子信息

E-mail: guanfei5013@ 126. com

Chen Ming received his B. Sc. degree and Ph. D. degree both from the University of Science and Technology of China in 2002 and 2007, respectively. He is currently a senior engineer at the National Key Laboratory of Electromagnetic Space Security, and his main research direction is electronic information systems.



商晨(通信作者),2020 年于陕西科技大学获得学士学位,现为西安电子科技大学博士研究生,主要研究方向为板壳结构形状感知与健康检测。

E-mail: ccshang@ stu. xidian. edu. cn

Shang Chen (Corresponding author) received the B. Sc. degree from the school of mechanical and electrical engineering, Shanxi University of Science and Technology, Xi'an, China, in 2020. She is currently pursuing a Ph. D. degree in Xidian University. Her current research interests include shape sensing for shell.



冷国俊,2005 年于兰州理工大学获得学士学位,2012 年于西安电子科技大学获得博士学位,现为电磁空间安全全国重点实验室正高级工程师,主要研究方向为电子装备场路耦合。

E-mail: guojun. leng@ gmail. com

Leng Guojun received his B. Sc. degree from Lanzhou University of Technology in 2005, and received his Ph. D. degree from Xidian University in 2012. He is currently a senior engineer at the National Key Laboratory of Electromagnetic Space Security. His main research interests include field road coupling of electronic equipment.