第 42 卷　第 10 期　　仪　器　仪　表　学　报　　Vol. 42 No. 10
2021 年 10 月　　Chinese Journal of Scientific Instrument　　Oct. 2021

DOI：10. 19650/j. cnki. cjsi. J2108079

考虑变时滞效应的弱刚度球头铣刀铣削稳定性研究*

董永亨[1]，李淑娟[1]，张　倩[2]，李鹏阳[1]，李　旗[1]

（1. 西安理工大学机械与精密仪器工程学院　西安　710048；2. 桂林电子科技大学机电工程学院　桂林　541004）

摘　要：弱刚度球头铣刀广泛应用于深腔模具零件的铣削中，加工过程中容易发生颤振，确定加工稳定域是实现稳定铣削的重要手段，但该铣削系统具有变时滞特点，稳定性分析的难度较大，制约着加工质量的提高。为此，提出一种弱刚度球头铣刀铣削稳定性分析方法。首先，建立弱刚度刀具系统的动力学方程；接着，基于 Newton-Raphson 求解出刀齿选定点的时滞量；最后，基于全离散法提出考虑变时滞再生效应的稳定性分析方法，并利用 Floquet 定理获得了不同转速所对应的临界切深，构建出铣削稳定性叶瓣图。实验结果表明在叶瓣图的非稳定域铣削时铣削力中含颤振频率成分，所加工表面的 S_y 和 S_a 比稳定域内加工表面增大 35% 和 42%，说明该分析方法是可靠的，可为切削参数的选择和优化提供依据。

关键词：弱刚度球头铣刀；振动；变时滞；稳定性；全离散建模法

中图分类号：TH165+.4　　**文献标识码**：A　　**国家标准学科分类代码**：460.50

Study on milling stability of weak-stiffness ball-end-milling-cutters with variable time delay effect

Dong Yongheng[1], Li Shujuan[1], Zhang Qian[2], Li Pengyang[1], Li Qi[1]

(*1. School of Mechanical and Precision Instrument Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an 710048, China;*
2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Guilin University of Electronic Science and Technology, Guilin 541004, China)

Abstract: The weak-stiffness ball-end-milling-cutter is widely used in the milling of deep cavity die parts. The chatter is easy to occur in the machining process. How to determine machining stability region is an important way to enable stable milling. However, the milling system has a characteristic of variable time delay. It is difficult to analyze the milling stability, which restricts the improvement of machining quality. Therefore, a milling stability analysis method for the ball-end-milling-cutter with weak stiffness is proposed. Firstly, the dynamic equation of the cutter system with weak stiffness is established. Then, the time delay of the selected point of the cutter tooth is solved by using Newton-Raphson. Finally, based on the full-discretization method, a stability analysis method considering the regeneration effect with variable delay is proposed, and the critical cutting depth corresponding to different rotational speeds is obtained by the Floquet theorem. The milling stability lobe diagram is constructed. Experimental results show that there are chatter frequencies in the milling force when milling in the unstable region of the lobe diagram. Compared with those of the milled surface in the stable region, the S_y and S_a of the milled surface are increased by 35% and 42%. Results show that the analytical method is reliable, which can provide a basis for the selection and optimization of the cutting parameters.

Keywords: weak-stiffness ball-end-milling-cutter; vibration; variable time delay; stability; full-discretization modeling method

0　引　　言

弱刚性球头铣刀广泛应用于深腔模具等复杂零件的铣削中，刀具的颤振对铣削加工质量有直接影响，科学分析铣削稳定性并确定其切削稳定域是减小振动对加工质量影响的有效手段，也是加工参数选择和优化的主要依据[1-2]。稳定性分析的常用方法主要有频域法和时域法。

频域分析法中主要有单频法和多频法，单频法是基于周期力系数矩阵的零阶平均项且忽略系统的交叉传递

收稿日期：2021-06-11　　Received Date：2021-06-11

*基金项目：国家自然科学基金（52075439）、校博士启动金（102-451121001）项目资助

函数项,在频域中通过解析计算铣削稳定边界的一种方法[3-4],该方法是目前最快的稳定性预报方法,但是不能适用于低径向切深工况的稳定性预报[5-6],为此,Merdol 等[7]随后又提出的多频率法。多频率法考虑了周期力系数矩阵的高阶展开项,在计算过程中需要迭代搜索颤振频率,故不再具有临界切深的解析表达式,该方法已经不但成功地应用于一般球头铣刀铣削[8],而且还应用于不等距齿铣削[9]、变螺旋角铣削[10]等情况。然而,该方法虽然能够应用于不同的径向切深工况,但是计算量大,不利于推广。

时域分析法主要有时域有限元法、半离散法和全离散法。时域有限元法首先需要假设切入时间区段上的位移模式,再通过加权残值法获取一个刀齿切削周期上的系统状态转移矩阵,最后根据 Floquet 理论判断该转移矩阵特征值的谱半径是否小于 1 来判稳铣削稳定性,Bayly 等[11]提出该方法,并将其应用于单自由度和两自由度铣削工况,Bobrenkov 等[12]使用时域有限元法分析了多齿同时参与铣削工况的稳定性,Sims 等[13]将时域有限元法运用于变齿距和变螺旋角刀具铣削判稳,时域有限元分析法可以准确预报低径向切深工况铣削稳定性预报,但不太适合于大径向切深的工况[11];半离散法离散铣削动力学微分方程中的时滞项,同时对每一小时间区段上的时滞项做零阶平均处理,并对周期系数项做分段零阶平均处理,这样就可以将加工动力学时滞方程转化成一系列常微分方程,在此基础上,构造一个刀齿切削周期上的系统状态转移矩阵,与时域有限元法一样,最后基于 Floquet 理论判断铣削稳定性,Insperger 等[14-15]提出了半离散法,并将其应用于铣削过程的判稳,并在此基础上讨论了颤振频率,Zatarain 等[16]使用半离散法分析了铣刀螺旋角对稳定边界的影响,岳彩旭等[17]使用半离散法分析了插铣的稳定性,Wan 等[18]提出了考虑铣削过程多时滞效应的统一的半离散法。然而,半离散法主要适用于低径向切深的场合,同时,所计算的 Floquet 状态转移矩阵不仅依赖于主轴转速,还与切深有直接关系,计算效率不高;Ding 等[19-20]提出了包括一阶和二阶的全离散法,这种方法不但离散铣削动力学方程中的时滞项,还离散状态项,同时对周期矩阵在每个离散区间内做插值处理,实现稳定性的求解,Guo 等[21]在此基础上通过牛顿插值提出了三阶全离散法,得出了具有比一阶、二阶全离散法更高的计算精度和更快的计算效率。与半离散算法相比,全离散法对时滞微分方程中的各个部分都进行了离散化处理,简化了离散化后迭代方程的复杂度,在计算过程中所涉及的矩阵指数函数只依赖于转速而与切深无关,所以计算量比半离散法的小,求解速度更快,收敛性更高,更重要的是更加便于表面位置误差的计算,同时,该方法可以适用于大/小径向切深、大/小轴向切深、薄壁件铣削等各种工况,具有良好的通用性,然而,目前的研究对象主要集中在单一时滞系统,或由不等距刀齿及刀具偏心等所引起的多个固定时滞情况下,而球头铣刀在加工过程中由于刀齿结构和刀具跳动等因素的综合影响,呈现明显的变时滞特性,Liang 等[22]虽然考虑到了球头铣刀铣削的变时滞特性,但在求解过程中又对时滞量做了平均处理,将其转化为准定值时滞。

本文将在考虑刀具的刀齿结构和姿态调整以及跳动误差等因素的影响的基础上,建立弱刚性球头铣刀铣削系统的动力学模型,并基于 Newton-Raphson 求解某切削时刻刀齿选定点的时滞量,基于全离散法提出考虑变时滞再生效应的球头铣刀铣削稳定性的分析方法,并利用 Floquet 定理获得不同转速所对应的临界切深,构建出弱刚度球头铣刀铣削颤振稳定性叶瓣图。

1　弱刚性刀具系统的动态切削动力学方程

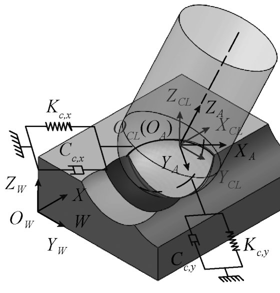
1.1　动力学方程的建立

如图 1 所示,工件坐标系 $Ow\text{-}XwYwZw$(简称 $\{W\}$)为固连在工件上的全局坐标系,加工表面上点的坐标和刀具轨迹均在该坐标系下确定;刀具瞬时进给坐标系 $O_{CL}-X_{CL}Y_{CL}Z_{CL}$(简称 $\{CL\}$),其中,坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 与进给速度方向平行且同向,$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 为理想的被加工表面的法线方向,指向实体外,$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Y}_{CL}}$ 为 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 与 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 的叉乘;主轴随动坐标系 $O_A\text{-}X_AY_AZ_A$(简称 $\{A\}$)固连在机床主轴上,$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_A\boldsymbol{Z}_A}$ 与主轴轴线重合,且使刀具远离工件方向为正向,当 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_A\boldsymbol{Z}_A}$ 与 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 完全重合时,该坐标系的另外两个坐标轴及其方向与 $\{CL\}$ 的完全重合,但刀具的姿态调整时,是使 $\{A\}$ 绕 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Y}_{CL}}$ 的旋转而使得 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_A\boldsymbol{Z}_A}$ 与 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 之间会产生夹角,从而获得不同的铣削方式。弱刚性刀具 - 刚性工件中球头铣刀动态铣削系统可以简化为 $\{A\}$ 中相互垂直的 2 自由度系统。忽略不同方向的模态耦合效应,仅考虑振动诱导下刀具的动态位移所引起的再生切屑厚度,在建立式(1)所示的动力学方程。

$$\boldsymbol{M}_c\ddot{\boldsymbol{q}}_c(t)+\boldsymbol{C}_c\dot{\boldsymbol{q}}_c(t)+\boldsymbol{K}_c\boldsymbol{q}_c(t)=\boldsymbol{F}_c(t) \tag{1}$$

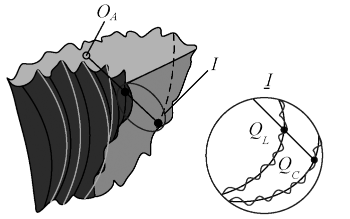
式中:$\boldsymbol{M}_c=\begin{bmatrix} M_{c,xx} & 0 \\ 0 & M_{c,yy}\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{C}_c=\begin{bmatrix} C_{c,xx} & 0 \\ 0 & C_{c,yy}\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{K}_c=\begin{bmatrix} K_{c,xx} & 0 \\ 0 & K_{c,yy}\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{q}_c(t)=\begin{bmatrix} x_c(t) \\ y_c(t)\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{F}_c(t)=\begin{bmatrix} F_x(t) \\ F_y(t)\end{bmatrix}$;$\boldsymbol{M}_c$、$\boldsymbol{C}_c$ 和 $\boldsymbol{K}_c$ 分别为刀具系统的模态质量矩阵、模态阻尼矩阵和模态刚度矩阵,单位分别为 kg、$\mathrm{N\cdot s\cdot m^{-1}}$ 和 $\mathrm{N\cdot m^{-1}}$;$x_c(t)$ 和 $y_c(t)$ 分别表示刀具在 x 和 y 方向的动态位移的模态

坐标,单位为 mm;$F_x(t)$ 和 $F_y(t)$ 分别表示刀具在 x 和 y 方向所受的力,单位为 N。



(a) 弱刚度刀具-刚度工件系统

(a) Weak rigidity cutter-rigidity workpiece system



(b) 动态位移在切屑前后表面产生的波纹

(b) Ripples generated by dynamic displacement on the front and rear surfacesof the chips

图 1 弱刚度刀具-刚度工件动力学系统

Fig. 1 Dynamic system of weak rigidity cutter-rigidity workpiece

1.2 动态铣削力的求解

按照切削力的 II 型机械建模法[8]求解刀齿微元的切削力,再用积分法求出刀具所受的切削力。刀齿微元的受力情况如图 2 所示。

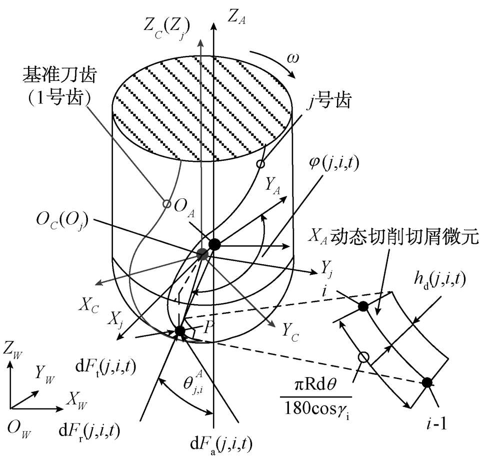


图 2 刀齿微元所受动态力

Fig. 2 Dynamic forces on cutter tooth elements

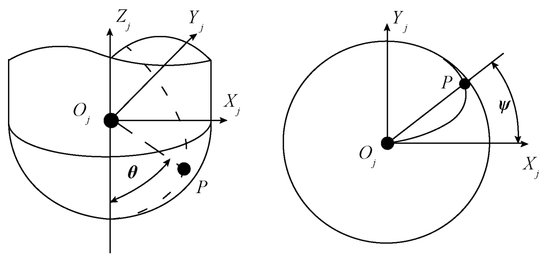
引入新参考坐标系:刀具坐标系和刀齿坐标系。刀具坐标系 O_C-$X_CY_CZ_C$(简称$\{C\}$)的原点 O_C 固连在刀具的球头中心,$\overrightarrow{\boldsymbol{O_CZ_C}}$ 与刀具的理论轴线重合,且与$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AZ_A}}$ 始终保持平行,两者之间的距离为 ρ,$\overrightarrow{\boldsymbol{O_CX_C}}$ 与基准刀齿(第一个刀齿)刃线在坐标平面 $O_CX_CY_C$ 上投影线起点的切线方向重合,该坐标系绕坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AZ_A}}$ 以角速度 ω 旋转,坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_CY_C}}$ 与$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AY_A}}$ 之间的夹角为 $\mu_0+\phi_C$(μ_0 为主轴未开始旋转的初始状态下两者之间的夹角,ϕ_C 为 t 时刻主轴旋转过的角度,$\phi_C=\omega t$)。刀齿坐标系 O_j- $X_jY_jZ_j$(简称$\{j\}$)的坐标原点 O_j 也固连在刀具的球头中心,其坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_jZ_j}}$ 与$\overrightarrow{\boldsymbol{O_CZ_C}}$ 完全一致,坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_jX_j}}$ 与刀齿 j 的刃线在坐标平面 $O_jX_jY_j$ 上投影线起点的切线方向重合。

1)切削刃几何模型

如图 3 所示,定导程螺旋刃球头铣刀的刀齿 j 上任意点 P 在$\{j\}$中的坐标:

$$\begin{cases} x_p^j = R\sin\theta\cos\psi \\ y_p^j = R\sin\theta\sin\psi \\ z_p^j = -R\cos\theta \end{cases} \tag{2}$$

式中:θ 为点 P 的轴向位置角(°);R 为刀具半径(mm);ψ 为该点所对应的螺旋滞后角(°),$\psi=180\tan\gamma_0(1-\cos\theta)/\pi$[23],其中 γ_0 为圆柱面上刀齿刃口曲线的螺旋角。



(a) 轴测图 (a) Axonometric drawing

(b) 俯视图 (b) Top view

图 3 螺旋齿球头铣刀

Fig. 3 Ball-end-milling-cutter with spiral tooth

刀齿 j 与基准刀齿的夹角 $\phi_j=360(j-1)/n_t$(°)。其中,n_t 为刀齿总数,坐标系$\{j\}$相对于$\{C\}$的变换矩阵

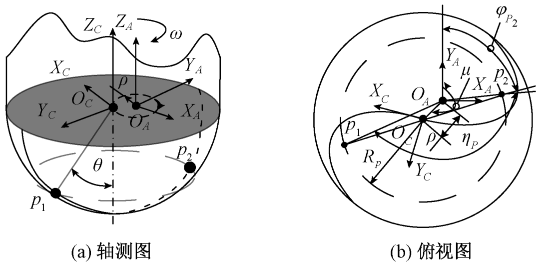
$$\boldsymbol{M}_{Cj} = \begin{bmatrix} \cos\phi_j & -\sin\phi_j & 0 & 0 \\ \sin\phi_j & \cos\phi_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

由于制造和装夹误差等因素的影响,刀具的中心轴线与主轴的中心轴线之间总存在偏心,如图 4 示。假定刀具中心 O_C 和主轴中心 O_A 之间的偏心距离为 ρ(mm),矢量$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AO_C}}$ 相对于坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AY_A}}$ 的夹角为 μ(°),且规定绕坐标轴$\overrightarrow{\boldsymbol{O_AZ_A}}$ 顺时针旋转方向为正;主轴顺时针方向旋转,其转速为 N(r/min),则角速度 $\omega=\pi N/30$(rad/s),t(s)时刻旋转过的角度 $\phi_C=180\omega t/\pi$(°),则$\{C\}$相对于

$\{A\}$ 的变换矩阵:

$$M_{AC}=\begin{bmatrix}\cos\phi_C & \sin\phi_C & 0 & \rho\sin\mu-\sin\phi_C\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{4}$$

式中:$\mu=\mu_{0+}\phi_C$,其中,μ_0 为初始状态下 $\overrightarrow{O_AO_C}$ 与 $\overrightarrow{O_AY_A}$ 的初始夹角,顺时针旋转方向为正,为了简化研究,本文设定 $\mu_0=0°$。



(a) 轴测图
(a) Axonometric drawing

(b) 俯视图
(b) Top view

图 4　考虑刀具跳动的坐标系

Fig. 4　Coordinate systems considering cutter runout

通过齐次坐标矩阵变换可得到球头铣刀刀齿上任意点 P 在 $\{A\}$ 下的坐标。

$$[x_p^A\quad y_p^A\quad z_p^A\quad 1]^{\mathrm T}=M_{AC}M_{Cj}[x_p^j\quad y_p^j\quad z_p^j\quad 1]^{\mathrm T} \tag{5}$$

相应地,刀齿 j 任一点 P 在 $\{A\}$ 下描述的实际螺旋滞后角:

$$\psi_P^A=\arctan\left(\frac{y_P^A}{x_P^A}\right)\Bigg|_{\phi_c=0}=$$

$$\arctan\left(\frac{R\sin\phi_j\sin\theta\cos\psi+R\cos\phi_j\sin\theta\sin\psi+\rho}{R\cos\phi_j\sin\theta\cos\psi-R\sin\phi_j\sin\theta\sin\psi}\right) \tag{6}$$

2)动态切削力模型

按照切削力机械建模法[24]的思想,首先需要对刀齿微元进行切削力建模,为此,按等轴向位置角增量将刀齿离散成诸多刀齿微元,如图 2 所示,以刀齿离散点 i 的特征信息来代表刀齿上 $(i-1)\sim i$ 点之间的刀齿微元 i 信息,此时,刀齿 j 上的刀齿微元 i 在时刻 t 所受的切削力可以分解为切向单元力切削力 $\mathrm dF_{\mathrm t}(j,i,t)$、径向单元力切削力 $\mathrm dF_{\mathrm r}(j,i,t)$ 和轴向单元力切削力 $\mathrm dF_{\mathrm a}(j,i,t)$,则:

$$\begin{cases}\mathrm dF_{\mathrm t}(j,i,t)=g(j,i,t)K_{\mathrm t}h_d(j,i,t)\pi R\mathrm d\theta/(180\cos\gamma_i)\\ \mathrm dF_{\mathrm r}(j,i,t)=g(j,i,t)K_{\mathrm r}h_d(j,i,t)\pi R\mathrm d\theta/(180\cos\gamma_i)\\ \mathrm dF_{\mathrm a}(j,i,t)=g(j,i,t)K_{\mathrm a}h_d(j,i,t)\pi R\mathrm d\theta/(180\cos\gamma_i)\end{cases} \tag{7}$$

式中:$g(j,i,t)$ 为单位阶跃函数,当刀齿 j 上的刀齿微元 i 在时刻 t 与工件切触时,$g(j,i,t)=1$,否则,$g(j,i,t)=0$,切触状态可以按照文献[25]的方法判定;$h_d(j,i,t)$ 为刀齿 j 上刀齿微元 i 在时刻 t 切削时的动态未变形切屑厚度,单位为 mm;$K_{\mathrm t}$、$K_{\mathrm r}$ 和 $K_{\mathrm a}$ 分别为切向、径向和轴向力系数,单位为 N/mm^2。

3)动态切削厚度

仅考虑刀具在坐标轴 O_AX_A 和 O_AY_A 方向的振动,切削微元的动态切屑厚度:

$$h_d(j,i,t)=[\sin\theta_{j,i}^A\sin\phi(j,i,t)\quad\cos\theta_{j,i}^A\sin\phi(j,i,t)]\cdot\begin{bmatrix}x_c(t)-x_c(t-T(j,i,t))\\ y_c(t)-y_c(t-T(j,i,t))\end{bmatrix} \tag{8}$$

式中:$\phi(j,i,t)$ 为 O_A 与刀齿 j 上离散点 i 在时刻 t 所在位置的连线在平面 $X_AO_AY_A$ 上的投影相对于坐标轴矢量 $\overrightarrow{O_AY_A}$ 顺时针转过的角度,称为实际径向位置角,单位为(°);$\theta_{j,i}^A$ 为刀齿 j 上离散点 i 跟 O_A 的连线与 O_AZ_A 的锐夹角,即该刀齿离散点在坐标系 $\{A\}$ 下描述的轴向位置角,称为实际轴向位置角,单位为(°)。

4)动态铣削力

将刀齿微元瞬时所受的切向力、径向力和轴向力通过式(9)转化至 $\{A\}$ 下,即:

$$\begin{bmatrix}\mathrm dF_x^A(j,i,t)\\ \mathrm dF_y^A(j,i,t)\\ \mathrm dF_z^A(j,i,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\phi(j,i,t) & -\cos\phi(j,i,t) & 0\\ \cos\phi(j,i,t) & \sin\phi(j,i,t) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin\theta_{j,i}^A & 0 & \cos\theta_{j,i}^A\\ 0 & 1 & 0\\ \cos\theta_{j,i}^A & 0 & \sin\theta_{j,i}^A\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma_i & \sin\gamma_i\\ 0 & -\sin\gamma_i & \cos\gamma_i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm dF_r(j,i,t)\\ \mathrm dF_t(j,i,t)\\ \mathrm dF_a(j,i,t)\end{bmatrix} \tag{9}$$

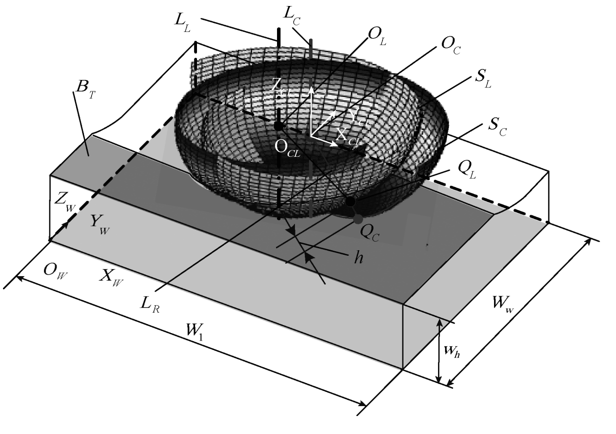
于是,刀具在时刻 t 所受的瞬时切削力在主轴随动坐标系 $\{A\}$ 下可表示为:

$$\begin{cases}F_x^A(t)=\sum\limits_{j=1}^{n_t}\sum\limits_{i=1}^{n_i}\mathrm dF_x^A(j,i,t)\\ F_y^A(t)=\sum\limits_{j=1}^{n_t}\sum\limits_{i=1}^{n_i}\mathrm dF_y^A(j,i,t)\\ F_z^A(t)=\sum\limits_{j=1}^{n_t}\sum\limits_{i=1}^{n_i}\mathrm dF_z^A(j,i,t)\end{cases} \tag{10}$$

式中:n_i 为刀齿微元总数。

2　时滞量求解

如图 5 所示,参考线(当前作用刀齿微元的瞬时作用点 Q_C 到刀位点 O_{CL} 的连线)上的两点 Q_L 和 Q_C 之间的距离决定了切削中的未变形切屑厚度,其中,Q_C 表示当前刀齿 j 上离散点 i 在时刻 t_C 的扫掠点,Q_L 表示前面刀齿的扫掠面与参考线的交点,通过求解该点所对应切削时刻 t_L,可以得到时滞量。



注：O_C：当前作用刀齿的瞬时球心；O_L：前一作用刀齿的瞬时球心；S_L：前一作用刀齿的扫掠面；S_C：当前作用刀齿的扫掠面；L_C：当前作用刀齿的瞬时轴线；L_L：前一作用刀齿的瞬时轴线；L_R：参考线；B_T：毛坯顶面；h：未变形切屑厚度。

图 5 球头铣刀铣削瞬时状态

Fig. 5 Instantaneous milling state of ball-end-milling-cutter

在实际铣削中，主轴随动坐标系 $\{A\}$ 分别绕坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Y}_{CL}}$ 旋转实现刀具姿态的调整，如图 6 所示。刀具姿态调整后坐标系 $\{A\}$ 的坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_A\boldsymbol{Z}_A}$ 在坐标平面 $Y_{CL}O_{CL}Z_{CL}$ 上的投影线与坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 间的夹角，称为侧倾角，用 α 表示；坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_A\boldsymbol{Z}_A}$ 在坐标平面 $X_{CL}O_{CL}Z_{CL}$ 上的投影与坐标轴矢量 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 之间的夹角，称为前倾角，用 β 表示。先使 $\{A\}$ 绕 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Y}_{CL}}$ 旋转角度 β'，使 $\beta' = \arctan(\tan\beta\cos\alpha)$，再使 $\{A\}$ 绕 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 旋转角度 α，且定义绕各自参考方向的正方向逆时针旋转为正，反之为负，则刀具侧倾和前倾的齐次坐标变换矩阵分别为：

$$\boldsymbol{R}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos\beta' & 0 & \sin\beta' & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta' & 0 & \cos\beta' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

通过齐次坐标矩阵变换可得到球头铣刀刀齿上任意点 P 在 $\{CL\}$ 下的坐标：

$$[x_p^{CL} \quad y_p^{CL} \quad z_p^{CL} \quad 1]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{R}_\beta [x_p^A \quad y_p^A \quad z_p^A \quad 1]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

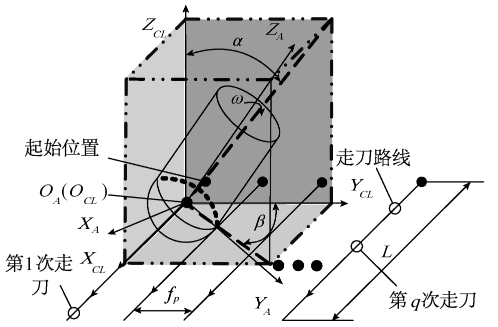


图 6 刀具的姿态调整及走刀

Fig. 6 Posture adjustment and feed of the cutter

假定进给时 O_{CL} 在 $\{W\}$ 的坐标为 (x_{CL}, y_{CL}, z_{CL})，则 $\{CL\}$ 相对于 $\{W\}$ 的齐次变换矩阵：

$$\boldsymbol{M}_{WCL} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{f}_x} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{t}_x} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{n}_x} & x_{CL} \\ \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{f}_y} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{t}_y} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{n}_y} & y_{CL} \\ \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{f}_z} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{t}_z} & \mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{n}_z} & z_{CL} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

式中：$\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{f}}$、$\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{t}}$ 和 $\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{n}}$ 分别表示坐标轴 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$、$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Y}_{CL}}$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{Z}_{CL}}$ 上的单位矢量，下标 x、y 和 z 表示各矢量在 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_W\boldsymbol{X}_W}$、$\overrightarrow{\boldsymbol{O}_W\boldsymbol{Y}_W}$ 和 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_W\boldsymbol{Z}_W}$ 上的投影矢量，如 $\mathrm{d}\overrightarrow{\boldsymbol{f}_x}$ 表示 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_{CL}\boldsymbol{X}_{CL}}$ 上的单位矢量在 $\overrightarrow{\boldsymbol{O}_W\boldsymbol{X}_W}$ 上的投影矢量。

则球头铣刀加工过程中，刀齿上任意点 P 在 $\{W\}$ 下的坐标：

$$[x_p^W \quad y_p^W \quad z_p^W \quad 1]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}_{WCL} [x_p^{CL} \quad y_p^{CL} \quad z_p^{CL} \quad 1]^{\mathrm{T}} \tag{15}$$

以球头铣刀单向直线铣削为研究对象，如图 6 所示，假定刀具进给方向为 $O_W X_W$ 的正方向。在实际加工中，前扫掠面往往是由上一刀齿扫掠形成，首先忽略上一刀齿的进给运动，并将其扫掠面简化为球面，球面中心的位置距当前刀位点的距离为每齿进给量 f_z，球面半径为刀具半径 R，假定参考线和该球面的交点为 Q^*，已知 Q_C 在 $\{CL\}$ 中的坐标为 $(x_{Q_C}^{CL}, y_{Q_C}^{CL}, z_{Q_C}^{CL})$，令 $x_{Q_C}^{CL}/z_{Q_C}^{CL} = a^*$、$y_{Q_C}^{CL}/z_{Q_C}^{CL} = b^*$，在 $\{CL\}$ 下联立球面方程和参考线方程，可得 Q^* 在 $\{CL\}$ 中的坐标：

$$\begin{cases} x_{Q^*}^{CL} = -\dfrac{a^{*2}f_z + a^* \sqrt{a^{*2}R^2 - b^{*2}f_z^2 + b^{*2}R^2 - f_z^2 + R^2}}{a^{*2} + b^{*2} + 1} \\ y_{Q^*}^{CL} = -\dfrac{a^* b^* f_z + b^* \sqrt{a^{*2}R^2 - b^{*2}f_z^2 + b^{*2}R^2 - f_z^2 + R^2}}{a^{*2} + b^{*2} + 1} \\ z_{Q^*}^{CL} = -\dfrac{a^* f_z + \sqrt{a^{*2}R^2 - b^{*2}f_z^2 + b^{*2}R^2 - f_z^2 + R^2}}{a^{*2} + b^{*2} + 1} \end{cases} \tag{16}$$

利用齐次坐标变换原理求得 Q^* 在 $\{A\}$ 中的坐标

$$[x_{Q^*}^A \quad y_{Q^*}^A \quad z_{Q^*}^A \quad 1]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}_\beta^{-1}\boldsymbol{R}_\alpha^{-1}[x_{Q^*}^{CL} \quad y_{Q^*}^{CL} \quad z_{Q^*}^{CL} \quad 1]^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

则该点的轴向位置角 θ_{Q^*} 和径向位置角 φ_{Q^*} 分别为 $\arccos(|z_{Q^*}^A|/R)$ 和 $90\text{-arctan2}(y_{Q^*}^A, x_{Q^*}^A)$。已知被切削点 Q_C 所对应的当前时刻 t_C，用前述同样的办法求出其轴向位置角 θ_C 和径向位置角 ϕ_C，进而由式(6)算出 Q_C 和 Q^* 所对应的螺旋滞后角 ψ_C^A 和 $\psi_{Q^*}^A$，近似求出被切削点 Q^* 所对应的切削时刻 $t_{Q_0^*}$；同时，暂近似认为两点 Q_C 和 Q_L 各自所对应刀位点之间的距离为每齿进给量 f_z，根据正弦定理近似求出 Q_L 的轴向位置角 $\theta_{Q_0^*}$

$$\begin{cases} t_{Q_0^*} = t_C - \dfrac{60}{Nn_t} + \dfrac{(\psi_{Q^*} - \psi_C) + (\phi_C - \phi_{Q^*})}{60N} \\ \theta_{Q_0^*} = \theta_{Q^*} + \arcsin\left(\dfrac{f_z \cos\theta_{Q^*}}{R}\right) \end{cases} \tag{18}$$

由于 Q_L 在刀齿作用线上，按照直线公式建立方程组

$$\begin{cases} f_1 = (x_{Q_L}^W - x_{O_{CL}}^W)(z_{Q_C}^W - z_{O_{CL}}^W) - (x_{Q_C}^W - x_{O_{CL}}^W)(z_{Q_L}^W - z_{O_{CL}}^W) = 0 \\ f_2 = (y_{Q_L}^W - y_{O_{CL}}^W)(z_{Q_C}^W - z_{O_{CL}}^W) - (y_{Q_C}^W - y_{O_{CL}}^W)(z_{Q_L}^W - z_{O_{CL}}^W) = 0 \end{cases} \tag{19}$$

式中：$(x_{Q_C}^W, y_{Q_C}^W, z_{Q_C}^W)$ 和 $(x_{O_{CL}}^W, y_{O_{CL}}^W, z_{O_{CL}}^W)$ 分别为 Q_C 和刀位点 O_{CL} 在 $\{W\}$ 中的坐标，坐标值已知。

以 $(t_{Q_0^*}, \theta_{Q_0^*})$ 为初值点，即，$[t_0 \quad \theta_0]^{\mathrm{T}} = [t_{Q_0^*} \quad \theta_{Q_0^*}]^{\mathrm{T}}$，应用 Newton-Raphson 方法求得方程组(19)的解，如下式所示：

$$\begin{bmatrix} t_{k+1} \\ \theta_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_k \\ \theta_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial t} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial t} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \theta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_1(t_k, \theta_k) \\ f_2(t_k, \theta_k) \end{bmatrix} \tag{20}$$

式中：k 为迭代次数，$k = 0, 1, 2, \cdots$，迭代终止条件为 $[t_{k+1} - t_k \quad \theta_{k+1} - \theta_k]^{\mathrm{T}} = [0.05\lambda_t \quad 0.05\lambda_\theta]^{\mathrm{T}}$，当迭代终止时令 $t_L = t_k$。

在此基础上，可以求得时滞量：

$$T(j,i,t) = t_C - t_L \tag{21}$$

3　考虑变时滞效应的全离散稳定性分析

Ding 等[19-20]提出的基于定时滞的全离散求解稳定性的方法因具有较高的计算精度和效率以及良好的通用性而被广泛应用。然而，如前所述，受刀齿结构、刀具姿态调整和跳动等因素的影响，球头铣刀在铣削过程中的时滞量随着刀齿、刀齿上的微元和切削时间等的变化而变化，使得稳定性分析中的时滞时间不再是刀齿的切削周期，而是主轴的旋转周期 T_S(s)，$T_S = 60/N$。因此，在对球头铣刀铣削稳定性全离散求解时，需要考虑变时滞特性。根据文献[26]为了保证稳定性计算的精度，在设定时间步长 τ 时需保证不能大于刀具-工件系统最高振动模态周期的 14 倍，按照此要求将 T_S 均匀地分为 M_S 份，则时间步长单元 $\tau = T_S/M_S$，则在一个主轴旋转周期内，刀齿 j 上的微元 i 在切削时刻 t 的时滞量 $T(j,i,t)$ 所对应的时间单元 $m(j,i,t) = \mathrm{round}(T(j,i,t)/\tau)$，其中，round( )为四舍五入的取整函数。

令 $\boldsymbol{p}_c(t) = \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}_c(t) + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q}_c(t)/2$，同时记 $\boldsymbol{X}(t) = [\boldsymbol{q}_c(t) \quad \boldsymbol{p}_c(t)]^{\mathrm{T}}$，则式(1)可化为：

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(t) + \sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_{j,i}(t)\boldsymbol{X}(t) - \sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_{j,i}(t)\boldsymbol{X}(t - \boldsymbol{T}(j,i,t)) \tag{22}$$

式中：$\boldsymbol{A}_0$ 为系统化时不变性质的常数矩阵，$\boldsymbol{A}_{j,i}(t)$ 为考虑再生效应下动态切削力综合系数矩阵，分别为：$\begin{bmatrix} \dfrac{-\boldsymbol{M}_C^{-1}\boldsymbol{C}_C}{2} & \boldsymbol{M}_C^{-1} \\ \dfrac{\boldsymbol{C}_C\boldsymbol{M}_C^{-1}\boldsymbol{C}_C}{4} - \boldsymbol{K}_C & \dfrac{-\boldsymbol{C}_C\boldsymbol{M}_C^{-1}}{2} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \boldsymbol{H}_C(j,i,t) & 0 \end{bmatrix}$，其中，$\boldsymbol{H}_C(j,i,t)$ 为切削力的转换系数矩阵，其计算公式如下：

$$\boldsymbol{H}_c(j,i,t) = \begin{bmatrix} H_{c,xx}(j,i,t) & H_{c,xy}(j,i,t) \\ H_{c,yx}(j,i,t) & H_{c,yy}(j,i,t) \end{bmatrix} \tag{23}$$

式中：$H_{c,xx}, H_{c,xy}, H_{c,yx}, H_{c,yy}$ 分别表示刀具在 x 方向的动态位移对 x 向切削力影响的转换系数矩阵，刀具在 y 方向的动态位移对 x 向切削力影响的转换系数矩阵，刀具在 x 方向的动态位移对 y 向切削力影响的转换系数矩阵，刀具在 y 方向的动态位移对 y 向切削力影响的转换系数矩阵，其计算公式如下：

$$\begin{cases}
H_{c,xx}(j,i,t)=\dfrac{g(\phi(j,i,t))\pi R\mathrm{d}\theta}{180\cos\gamma_i}\left\{\begin{array}{l}-\sin^2\phi(j,i,t)\sin^2\theta^A_{j,i}k_r(\theta_i)+\\ \left[-\cos\phi(j,i,t)\cos\gamma_i-\sin\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\sin\gamma_i\right]k_t(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\sin\phi(j,i,t)+\\ \left[-\cos\phi(j,i,t)\sin\gamma_i+\sin\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\cos\gamma_i\right]k_a(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\sin\phi(j,i,t)\end{array}\right\}\\
H_{c,xy}(j,i,t)=\dfrac{g(\phi(j,i,t))\pi R\mathrm{d}\theta}{180\cos\gamma_i}\left\{\begin{array}{l}-\sin\phi(j,i,t)\sin^2\theta^A_{j,i}k_r(\theta_i)\cos\phi(j,i,t)+\\ \left[-\cos\phi(j,i,t)\cos\gamma_i-\sin\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\sin\gamma_i\right]k_t(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\cos\phi(j,i,t)+\\ \left[-\cos\phi(j,i,t)\sin\gamma_i+\sin\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\cos\gamma_i\right]k_a(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\cos\phi(j,i,t)\end{array}\right\}\\
H_{c,yx}(j,i,t)=\dfrac{g(\phi(j,i,t))\pi R\mathrm{d}\theta}{180\cos\gamma_i}\left\{\begin{array}{l}-\sin\phi(j,i,t)\sin^2\theta^A_{j,i}k_r(\theta_i)\cos\phi(j,i,t)+\\ \left[\sin\phi(j,i,t)\cos\gamma_i-\cos\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\sin\gamma_i\right]k_t(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\sin\phi(j,i,t)+\\ \left[\sin\phi(j,i,t)\sin\gamma_i+\cos\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\cos\gamma_i\right]k_a(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\sin\phi(j,i,t)\end{array}\right\}\\
H_{c,yy}(j,i,t)=\dfrac{g(\phi(j,i,t))\pi R\mathrm{d}\theta}{180\cos\gamma_i}\left\{\begin{array}{l}-\cos^2\phi(j,i,t)\sin^2\theta^A_{j,i}k_r(\theta_i)+\\ \left[\sin\phi(j,i,t)\cos\gamma_i-\cos\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\sin\gamma_i\right]k_t(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\cos\phi(j,i,t)+\\ \left[\sin\phi(j,i,t)\sin\gamma_i+\cos\phi(j,i,t)\cos\theta^A_{j,i}\cos\gamma_i\right]k_a(\theta_i)\sin\theta^A_{j,i}\cos\phi(j,i,t)\end{array}\right\}
\end{cases} \tag{24}$$

令 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})=\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{t})$，则式(22)可简化为：

$$\dot{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}_0\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})-\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\left[\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{t}))\right] \tag{25}$$

令 $k=0,1,2,\cdots,M_S$，在时间区间 $[k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+\tau]$ 上，$T(j,i,t)=T(j,i,k\tau)$，式(25)的解为：

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{t})=\mathrm{e}^{A_0(t-k\tau)}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau})+\int_{k\tau}^{t}\left\{\mathrm{e}^{A_0(t-\xi)}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi})-\\ \sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{\xi})\cdot\\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k\tau}))\end{array}\right]\end{array}\right\}\right\}\mathrm{d}\xi \tag{26}$$

记 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau})$ 为 $\boldsymbol{X}_{k+1}$，则：

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=\mathrm{e}^{A_0\tau}\boldsymbol{X}_k+\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{A_0\xi}\left\{\begin{array}{l}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})-\\ \sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}\left[\begin{array}{l}\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})\cdot\\ \boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k\tau}))\end{array}\right]\end{array}\right\}\mathrm{d}\xi \tag{27}$$

对周期系数矩阵 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})$ 和 $\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})$、状态项 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})$、时滞项 $\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k\tau}))$ 在时间区间 $[k\tau\leqslant t\leqslant k\tau+\tau]$ 上采用线性插值逼近，即：

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A}_0^{(k)}+\boldsymbol{A}_1^{(k)}\xi \tag{28}$$

式中：$\boldsymbol{A}_0^{(k)}=\boldsymbol{A}_{k+1}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau})$，$\boldsymbol{A}_1^{(k)}=(\boldsymbol{A}_k-\boldsymbol{A}_{k+1})/\tau=[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau})]/\tau$。

$$\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{A}_{(j,i)0}^{(k)}+\boldsymbol{A}_{(j,i)1}^{(k)}\boldsymbol{\xi} \tag{29}$$

式中：$\boldsymbol{A}_{(j,i)0}^{(k)}=\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{k\tau}+\boldsymbol{\tau})$，$\boldsymbol{A}_{(j,i)1}^{(k)}=[\boldsymbol{A}_{j,i}(\boldsymbol{k\tau})-\boldsymbol{A}_{j,i}(k\tau+\tau)]/\tau$。

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\tau-\xi)=\boldsymbol{X}_{k+1}+\xi(\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_{k+1})/\tau \tag{30}$$

$$\boldsymbol{X}(\boldsymbol{k\tau}+\tau-\xi-\boldsymbol{T}(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i},\boldsymbol{k\tau}))=\boldsymbol{X}_{k+1-m_{j,i,k}}+\xi(\boldsymbol{X}_{k-m_{j,i,k}}-\boldsymbol{X}_{k+1-m_{j,i,k}})/\tau \tag{31}$$

式中：$m_{j,i,k}=T(j,i,k\tau)/\tau$。

将式(28)～(31)代入(27)得

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=(\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_{0,k})\boldsymbol{X}_k+\boldsymbol{P}_{k+1}\boldsymbol{X}_{k+1}+\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}(\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}-1}\boldsymbol{X}_{k+1-m_{j,i,k}})+\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}(\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}}\boldsymbol{X}_{k-m_{j,i,k}}) \tag{32}$$

式中：$\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{\Phi}_0$，$\boldsymbol{P}_{0,k}=(\boldsymbol{\Phi}_2/\tau)A_0^{(k)}+(\boldsymbol{\Phi}_3/\tau)A_1^{(k)}$，$\boldsymbol{P}_{k+1}=(\boldsymbol{\Phi}_1-\boldsymbol{\Phi}_2/\tau)A_0^{(k)}+(\boldsymbol{\Phi}_2-\boldsymbol{\Phi}_3/\tau)A_1^{(k)}$，$\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}-1}=-[(\boldsymbol{\Phi}_1-\boldsymbol{\Phi}_2/\tau)\boldsymbol{A}_{(j,i)0}^{(k)}+(\boldsymbol{\Phi}_2-\boldsymbol{\Phi}_3/\tau)\boldsymbol{A}_{(j,i)1}^{(k)}]$，$\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}}=-[(\boldsymbol{\Phi}_2/\tau)\boldsymbol{A}_{(j,i)0}^{(k)}+(\boldsymbol{\Phi}_3/\tau)\boldsymbol{A}_{(j,i)1}^{(k)}]$，其中，$\boldsymbol{\Phi}_0=\mathrm{e}^{A_0\tau}$，$\boldsymbol{\Phi}_1=\int_0^{\tau}\mathrm{e}^{A_0\xi}\mathrm{d}\xi$，$\boldsymbol{\Phi}_2=\int_0^{\tau}\xi\mathrm{e}^{A_0\xi}\mathrm{d}\xi$，$\boldsymbol{\Phi}_3=\int_0^{\tau}\xi^2\mathrm{e}^{A_0\xi}\mathrm{d}\xi$。

大多数情况下，逆矩阵 $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{k}_{+1}]^{-1}$ 存在，则：

$$\boldsymbol{X}_{k+1}=[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}_{k+1}]^{-1}\times\left\{\begin{array}{l}[\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_{0,k}]\boldsymbol{X}_k+\sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}(\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}-1}\boldsymbol{X}_{k+1-m_{j,i,k}})+\\ \sum_{j=1}^{n_t}\sum_{i=1}^{n_i}(\boldsymbol{P}_{m_{j,i,k}}\boldsymbol{X}_{k-m_{j,i,k}})\end{array}\right\} \tag{33}$$

若 $[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}\boldsymbol{k}_{+1}]$ 奇异，则按文献[20]用 Moore-Penrose 广义逆求解。

设 $\boldsymbol{Y}_k=[\boldsymbol{X}_k,\boldsymbol{X}_{k-1},\cdots,\boldsymbol{X}_{k+1-M_S},\boldsymbol{X}_{k-M_S}]^{\mathrm{T}}$，依上式

$$\boldsymbol{Y}_{k+1}=\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{Y}_k \tag{34}$$

式中：$\boldsymbol{D}_k$ 为 $k\tau$ 至 $(k+1)\tau$ 切削状态转移矩阵。

在一个主轴旋转周期 T_S 内切削状态转移矩阵：

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{D}_{M_S-1}\boldsymbol{D}_{M_S-2}\cdots\boldsymbol{D}_1\boldsymbol{D}_0 \tag{35}$$

该系统的稳定性可依据 Floquent 理论确定，即：

$$\max(|\lambda(\boldsymbol{H})|)\begin{cases}<1, & \text{稳定}\\ =1, & \text{不稳定}\\ >1, & \text{不稳定}\end{cases} \tag{36}$$

式中：$|\lambda(\boldsymbol{H})|$ 为状态转移矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的特征值的模。

4　实验验证

采用秦川机床厂生产的加工中心 MV510 作为实验机床,该机床的最高主轴转速为 5 000 r/min,定位精度为 0.018 mm,重复定位精度为 0.008 mm;实验刀具是整体长度为 120 mm 的 Y330 整体式硬质合金球头铣刀,直径为 ϕ10 mm,齿数为 2,螺旋角为 35°,弹性模量为 210 GPa,装夹悬伸长度为 85 mm,安装之后测得径向跳动为 0.028 mm;工件材料为航空铝合金 7050-T6,其化学成分及机械性能见表 1 和 2,工件的长×宽×高为 180 mm×42 mm×11 mm;为了在三轴机床上使刀具相对于工件的姿态调整,采用组合夹具的基础板和圆柱支撑部件,按照正弦规的工作原理调整角度。

表 1　工件材料化学成分组成

Table 1　Workpiece material chemical composition　　%

化学成分组成及重量占比										
Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	Ti	其他		Al
								每个	合计	
≤0.12	≤0.15	2.0~2.6	≤0.1	1.9~2.6	≤0.04	5.7~6.7	≤0.06	≤0.05	≤0.15	余量

表 2　航空铝合金 7050-T6 的机械性能

Table 2　Characteristics of aviation aluminum alloy 7050-T6

弹性模量/GPa	摩擦因数	密度/($kg\cdot m^{-3}$)	比热/($J\cdot kg^{-1}\cdot m^{-1}$)	热导率/($W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}$)	线性膨胀系数/($10^{-6}\cdot K^{-1}$)
69	0.30	2 850	526	114	20.8

如图 7(a)和(b),弱刚性刀具系统的动态性能测试系统由力锤、加速度传感器以及对应的数据采集设备和信号分析软件 LMS Test. Lab8B 组成,测试中采用力锤激励,假定切削力集中在刀头处,在刀头上安装加速度计,测量刀头处的响应加速度,数据采集器将力锤激励信号和加速度信号数字化采集到计算机上,然后由信号分析软件 LMS Test. Lab8B 进行分析和处理,得到系统的动态性能参数,结果如表 3 所示。

表 3　柔性刀具的模态参数

Table 3　Modal parameters of flexible cutter

M_C/kg	C_C/($N\cdot S\cdot m^{-1}$)	K_C/($10^6\ N\cdot m^{-1}$)
$\begin{bmatrix} 0.293 & 0 \\ 0 & 0.293 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 95.478 & 0 \\ 0 & 95.478 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6.746 & 0 \\ 0 & 6.746 \end{bmatrix}$

切削力的测量采用 Kistler9257B 3 向压电式测力仪,其 X 和 Y 方向的灵敏度为 −7.5 pC/N,Z 向的灵敏度为 −3.7 pC/N,X 和 Y 方向量程 −5 000~5 000 N,Z 向量程 −5 000~10 000 N。切削力数据采集的部分主要包括 Kistler5070 电荷放大器,北京波普世纪科技发展有限公司的 WS-5921/U 系列 USB 数据采集仪,实验使用的采样频率为 10 kHz。

根据文献[27],使主轴转速为 3 000 r/min,每齿进给量为 0.1 mm/r,分别在背吃刀量分别为 0.5 mm,1.0 mm,…,5.0 mm 的条件下进行 10 组槽切铣削铝合金 7050-T6 试验,得到 X、Y 和 Z 向切削力共 30 组(各 10 组),通过最小二乘法回归出切削力系数:

(a) LMS动态性能测试系统
(a) LMS dynamic performance test system
(b) 弱刚度刀具模态参数测试
(b) Test of weak stiffness tool modal parameters
(c) 加工过程
(c) Processing processes

图 7　加工系统动态性能参数测试及切削实验

Fig. 7　Test for dynamic performance parameters of machining system and milling experiment

$$\begin{cases} K_t = 1\,324.380 + 1\,869.18\Theta - 2\,888.74\Theta^2 + 1\,113.31\Theta^3 \\ K_r = 1\,627.861 - 1\,177.53\Theta + 1\,412.63\Theta^2 - 692.54\Theta^3 \\ K_a = -247.480 + 1\,614.34\Theta - 2\,535.34\Theta^2 + 983.55\Theta^3 \end{cases} \tag{37}$$

式中：$\Theta = \pi\theta/180$，单位为 rad。

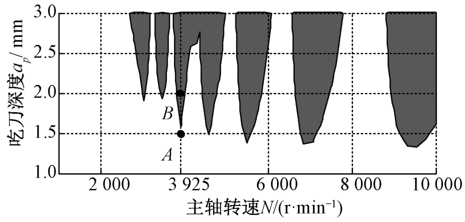
在表 4 所示的实验条件下完成球头铣刀单向直线进给铣削铝合金 7050-T6，通过仿真获得关于转速-吃刀深度的稳定域叶瓣图，叶瓣图的边界线为临界稳定线，即，$\max(|\lambda(\boldsymbol{H})|) = 1$；该线以下为稳定区域，即 $\max(|\lambda(\boldsymbol{H})|) < 1$；该线以下为非稳定区域，即，$\max(|\lambda(\boldsymbol{H})|) > 1$。根据叶瓣图分别选取稳定和不稳定的参数组合进行实际切实验，并测量其切削力，然后，使用 MATLAB 软件对所采集的切削力信号进行频域分析，根据分析结果验证叶瓣图的正确性。

表 4 实验切削条件

Table 4 Cutting conditions for the experiment

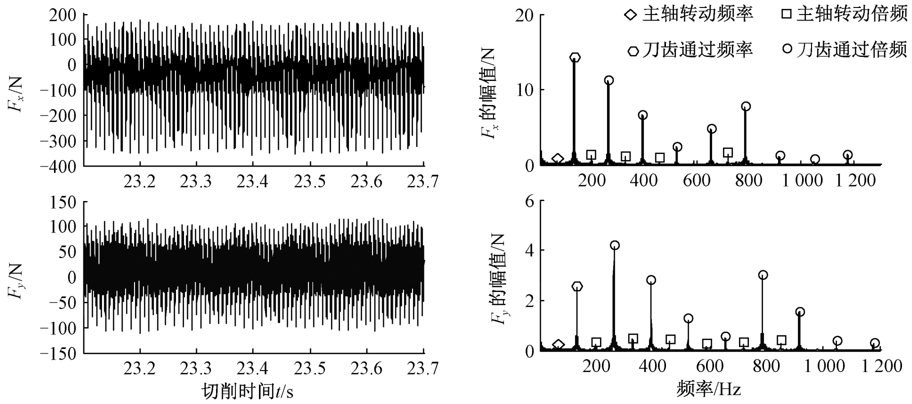
每齿进给量 f_z/(mm/(r·z))	行距 f_p/mm	主轴转速 N/(r/min)	吃刀深度 a_p/mm	前倾角 β/(°)	侧倾角 α/(°)
0.2	1.0	3 925	1.5, 2.0	0	−20

如图 8 所示为弱刚度球头铣刀铣削系统的稳定性叶瓣仿真图及其在稳定域内点 A 和不稳定域内点 B 所对应的切削用量下切削所测得的实际切削力。



(a) 系统的稳定性叶瓣图

(a) Stability lobe diagram of the system

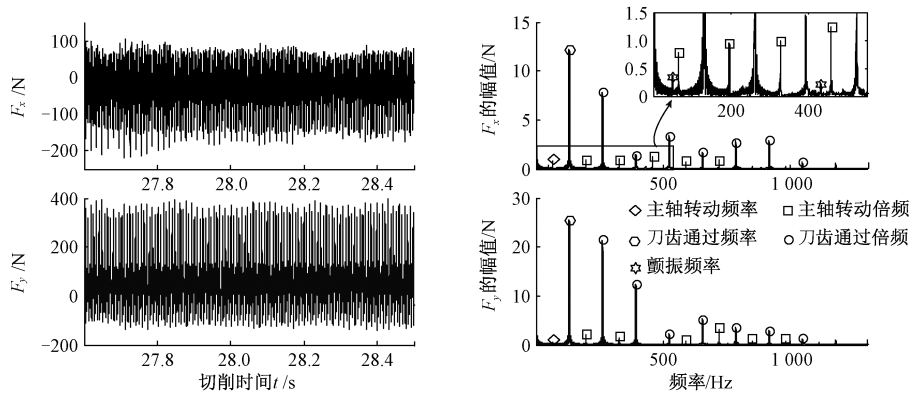


(b) A 点所对应的刀具受力时域图

(b) Time domain diagram of cutter force corresponding to point A

(c) A 点所对应的刀具受力频域图

(c) Frequency domain diagram of cutter force corresponding to point A



(d) B 点所对应的刀具受力时域图

(d) Time domain diagram of cutter force corresponding to point B

(e) B 点所对应的刀具受力频域图

(e) Frequencydomain diagram of cutter force corresponding to point B

图 8 弱刚性刀具-刚性工件系统的稳定性验证

Fig. 8 Stability validation of a weak-rigid cutter-rigid workpiece system

如图 8(b)和(c)所示,刀具在稳定域内切削时,切削系统发生强迫振动,切削力的频谱集中在主轴转动频率和刀齿通过频率及两者的倍频处;而如图 8(d)和(e)所示,在不稳定域内切削时,强迫振动和自激振动同时存在,切削力的频谱中除了主轴转动频率和刀齿通过频率及两者的倍频成分外,还有其它频率成分,如图 8(e)F_x 频域图中用星号标出的 49.84 Hz 和 431.1 Hz,而这些成分对应着自激振动频率,表明这切削颤振的存在。稳定域内点 A 和不稳定域内点 B 所对应的切削力的频域分析结果表明本文所提出的切削稳定性分析方法是正确的。

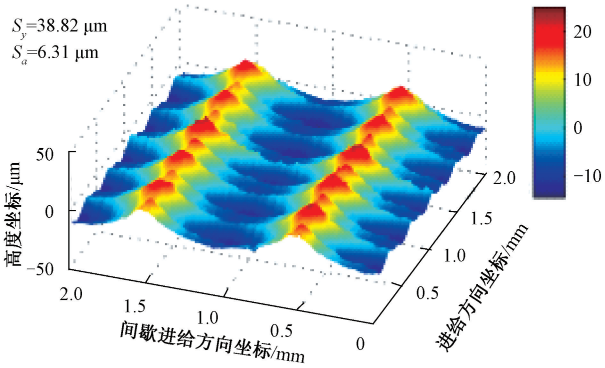
为了更进一步说明该弱刚度球头铣刀铣削稳定性分析方法的应用效果,搭建如图 9 所示的表面形貌测量实验系统,用分辨率为 0.1 nm 的徕卡激光共聚焦显微镜 DCM-3D 测量铣削表面形貌,比较图 8(a)所示稳定域内点 A 和不稳定域内点 B 所对应切削参数下铣削获得的表面形貌及其粗糙度,采用表面幅度参数中的算术平均偏差 S_a 和最大高度 S_y 作为表面粗糙度的表征参数,其中,S_a 表示表面形貌与基准面的高度方向距离在评定区域上的算术平均值,即表面形貌分布点在高度方向坐标的绝对值的平均值,反映了空间面上表面粗糙度的算术平均值;S_y 的具体含义为在评定区间内表面上分布的最高点与最低点之间的距离,反映了表面形貌分布点的高度波动的极差。

图 9　表面形貌测量实验系统

Fig. 9　Surface topography measurement experimental system

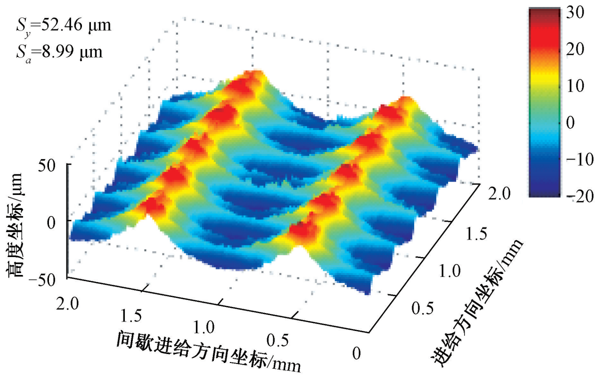
表面形貌的测量及其表征结果如图 10 所示,图 10(b)所示的表面形貌较图 10(a)所示的有较多的毛刺,光顺性较差,这是由于颤振使得刀具产生瞬时动态位移,改变了刀具的工作角度,出现负后角切削的情况,增大了后刀面与工件的摩擦,从而引起工件材料与后刀面的粘附,出现图示的的毛刺,同时,摩擦使工件材料的塑性流动加大,从而使表面峰顶隆起,并使表面谷底撕裂深度加大,最终导致表面的 S_y 值增大。与此同时,颤振使得表面形貌产生振纹,增大了整体的粗糙程度,使 S_a 值增大。

综上所述,无论切削力的频域分析还是表面形貌的测量及其表征结果对比均表明本文所提出的弱刚度球头铣刀铣削稳定性的分析方法是正确的,在稳定域内选择切削参数铣削有利于获得高的表面质量。



(a) A 点所对应的铣削表面形貌

(a) Milling surface topography corresponding to point A



(b) B 点所对应的铣削表面形貌

(b) Milling surface topography corresponding to point B

图 10　表面形貌的测量及表征结果

Fig. 10　Measurement and characterization results of the surface topographies

5　仿真分析

每齿进给量 f_z、行距 f_p、侧倾角 α 和前倾角 β 是球头铣刀铣削中的关键参数,分别进行单因素仿真分析球头铣刀铣削铝合金 7050-T6 时的稳定域叶瓣图,进而获得这几个参数对切削稳定性的影响特点,为实际加工参数的选择提供参考。

分别选择 0.1 mm/(r·z)、0.2 mm/(r·z)和 0.3 mm/(r·z)的每齿进给量 f_z,在行距 f_p、侧倾角 α 和前倾角 β 分别为 1 mm、0°和 0°的情况下进行仿真计算,得到图 11 所示的稳定域叶瓣图。整体上来讲,当主轴转速 N<4 600 r/min 时,小的每齿进给量(f_z=0.2 mm/(r·z))有利于减小再生动态切削力,使得切削稳定域变宽,但相对于 f_z=0.3 mm/(r·z),f_z=0.2 mm/(r·z)所对应的临界稳定线较低,主要是因为当在低速切削时大的每齿进给量对应着较大的时滞量,在阻尼的作用下使得稳定域反而增宽。然而,当主轴转速较大时每齿进给量对稳定性

的影响不明显，因此，在实际高速切削时可以通过增大进给而提高金属去除率，而不至于发生颤振。

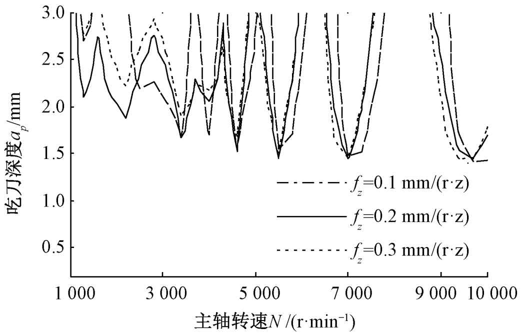


图 11 不同每齿进给量下系统的稳定性叶瓣图

Fig. 11 Stability lobes diagram of the system under different feed per teeth

分别选择 0.5 mm、1.0 mm 和 1.5 mm 的行距 f_p，在每齿进给量 f_z、侧倾角 α 和前倾角 β 分别为 0.2 mm/(r·z)、0°和 0°的情况下进行仿真计算，得到图 12 所示的稳定域叶瓣图。从该图 12 可以看出，行距对稳定性有非常明显的影响，减小行距有利于减小再生切厚，进而较小动态切削力，获得较宽的切削稳定域。

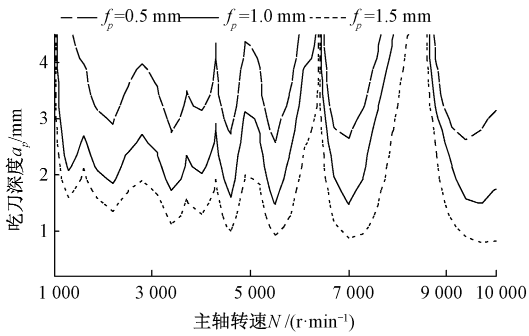


图 12 不同行距下系统的稳定性叶瓣图

Fig. 12 Stability lobes diagram of the system under different overlaps

分别选择-15°、0°和 15°的侧倾角 α，在每齿进给量 f_z、行距 f_p 和前倾角 β 分别为 0.2 mm/(r·z)、1 mm 和 0°的情况下进行仿真计算，得到图 13 所示的稳定域叶瓣图。从图 13 可以看出，侧倾角对稳定性有一定的影响。当正向侧倾时形成逆铣，而逆铣时未变形切屑厚度会随着刀齿的切入逐渐增大，动态切屑厚度也逐渐增大，但在主轴转速较低时，时滞时间相对较长，系统阻尼可以抑制刀具的动态位移，而使得稳定域较宽，而随着主轴转速的增加，时滞量缩短，阻尼对振动的抑制作用减弱，使得稳定域变窄。当负向侧倾时形成顺铣，顺铣时未变形切屑厚度会随着刀齿的切入逐渐减小，但刀齿刚开始接触工件时有一定的冲击，在低速的表现更为突出，使得临界稳定性叶瓣曲线在低速阶段下垂较明显，但是，当主轴速度增大使得转动频率远离切削系统的固有角频率时，冲击对系统的影响减弱，加之，动态切屑厚度也随刀齿切入而逐渐减小，使得高速切削时相同侧倾角对应顺铣的稳定域较逆铣的更宽。因此，在高速切削时，从稳定性角度出发，应尽可能负向侧倾刀具，形成顺铣切削。

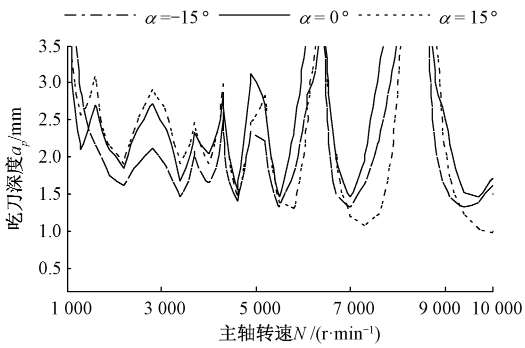


图 13 不同侧倾角下系统的稳定性叶瓣图

Fig. 13 Stability lobes diagram of the system under different titl angles

分别选择-15°、0°和 15°的前倾角 β，在每齿进给量 f_z、行距 f_p 和侧倾角 α 分别为 0.2 mm/(r·z)、1 mm 和 0°的情况下进行仿真计算，得到图 14 所示的稳定域叶瓣图。从图 14 可以看出，负向前倾刀具对稳定性较大的影响，这是因为刀具负向前倾时形成推铣，刀头部分对工件的挤压耕犁作用增大，加工刀头螺旋线方向变化较大，使得稳定域中有孤岛出现，同时，由于高速切削时系统的阻尼作用减弱，使得稳定性叶瓣曲线随主轴转速升高下垂明显。正向前倾刀具形成拉铣，拉铣时可以避开刀头的作用，刀齿的挤压和耕犁作用相对于拉铣减弱，切削作用增强，使得切削稳定域整体较宽。

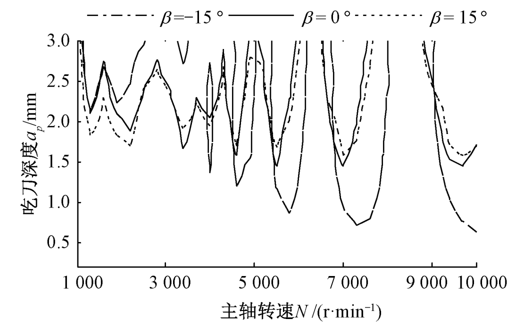


图 14 不同前倾角下系统的稳定性叶瓣图

Fig. 14 Stability lobes diagram of the system under different lead angles

6 结　　论

考虑刀具的刀齿结构和姿态调整以及跳动误差等因素的影响,在使用齐次坐标变换建立刀齿运动模型的基础上,建立了弱刚度球头铣刀动态铣削系统的动力学方程,为其稳定性研究奠定了基础。

充分考虑球头铣刀铣削的特点,并基于 Newton-Raphson 求解出了某切削时刻刀齿选定点的时滞量。

基于全离散分析法,并考虑球头铣刀铣削过程中刀齿切削点的变时滞特性,提出了考虑变时滞再生效应的球头铣刀铣削稳定性的分析方法,并利用 Floquet 定理获得了不同转速所对应的临界切深,构建了弱刚度球头铣刀铣削颤振稳定性叶瓣图,可以为实际生产中切削参数的选择提供依据。

在实际的球头铣刀高速切削中,为了兼顾加工效率和切削稳定性,可以选择较大的进给量、较小的行距、负值侧倾角和正值前倾角。

参考文献

[1] 邓聪颖, 杨凯, 苗建国, 等. 基于加工位置不确定的多工步数控铣削工艺参数优化研究[J]. 仪器仪表学报, 2020,41(4):111-118.
DENG C Y, YANG K, MIAO J G, et al. Process parameters optimization of multi-pass CNC milling considering uncertain machining position [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2020,41(4):111-118.

[2] 邓聪颖, 冯义, 魏博, 等. 基于 SVR-GA 算法的广义加工空间机床切削稳定性预测与优化研究[J]. 仪器仪表学报, 2019,40(10):230-239.
DENG C Y, FENG Y, WEI B, et al. Research on the prediction and optimization of machine tool cutting stability in generalized manufacturing space based on support vector regression machine and genetic algorithm[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019,40(10):230-239.

[3] 马万太,王宁生. 考虑弹性变形时的球头铣刀切削力模型的研究[J]. 南京航空航天大学学报, 1998(6):633-640.
MA W T, WANG N SH. Research on cutting force model of ball-end mill with considering spring deflection[J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 1998(6):633-640.

[4] BUDAK E, ALTINTAS Y. Analytical prediction of chatter stability in milling-part I: General formulation[J]. Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, 1998,120(1):22-30.

[5] ALTINTAS Y, STEPAN G, MERDOL D, et al. Chatter stability of milling in frequency and discrete time domain[J]. Cirp Journal of Manufacturing Science & Technology, 2009,1(1):35-44.

[6] COMAK A, ALTINTAS Y. Mechanics of turn-milling operations[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture: Design, Research and Application, 2017, 121:2-9.

[7] MERDOL S D, ALTINTAS Y. Multi frequency solution of chatter stability for low immersion milling[J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 2004,126(3): 459-466.

[8] ALTNTAS Y, LEE P. Mechanics and dynamics of ball end milling[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 1998,120(4):684-692.

[9] ALTNTAS Y, ENGIN S, BUDAK E. Analytical stability prediction and design of variable pitch cutters[J]. Journal of Manufacturing Science & Engineering, 1999, 121(2):173-178.

[10] TURNER S, MERDOL D, ALTINTAS Y, et al. Modelling of the stability of variable helix end mills[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2007,47(9):1410-1416.

[11] BAYLY P V, HALLEY J E, MANN B P, et al. Stability of interrupted cutting by temporal finite element analysis[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2003,125(2):220-225.

[12] BOBRENKOV O A, KHASAWNEH F A, BUTCHER E A, et al. Analysis of milling dynamics for simultaneously engaged cutting teeth[J]. Journal of Sound & Vibration, 2010,329(5):585-606.

[13] SIMS N D, MANN B, HUYANAN S. Analytical prediction of chatter stability for variable pitch and variable helix milling tools[J]. Journal of Sound & Vibration, 2008,317(3-5):664-686.

[14] INSPERGER T, ST P N G. Semi-discretization method for delayed systems [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2002, 55 (5): 503-518.

[15] INSPERGER T, ST P N G. Updated semi-discretization method for periodic delay-differential equations with discrete delay[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2004,61:117-141.

[16] ZATARAIN M, MUOA J, PEIGN G, et al. Analysis of the influence of mill helix angle on chatter stability[J]. Cirp Annals Manufacturing Technology. 2006,55(1): 365-368.

[17] 岳彩旭, 高海宁, 刘献礼. 基于动态切削力系数的插铣加工过程稳定性研究[J]. 机械工程学报, 2017,

53(17):193-201.
YUE C X, GAO H N, LIU X L. Research on the stability of the machining process basedon the dynamic cutting force coefficient [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2017,53(17):193-201.

[18] WAN M, ZHANG W H, DANG J W, et al. A unified stability prediction method for milling process with multiple delays [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010,50(1):29-41.

[19] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. A full-discretization method for prediction of milling stability[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010,50(5):502-509.

[20] DING Y, ZHU L M, ZHANG X J, et al. Second-order full-discretization method for milling stability prediction[J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2010,50(10):926-932.

[21] QUO Q, SUN Y, JIANG Y. On the accurate calculation of milling stability limits using third-order full-discretization method [J]. International Journal of Machine Tools & Manufacture, 2012,62:61-66.

[22] LIANG X G, YAO Z Q, LEI L. An improved numerical integration method for predicting milling stability with varying time delay[J]. International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013,68(9-12):1967-1976.

[23] OH C K. Surface topography analysis in high speed finish milling inclined hardened steel [J]. Precision Engineering, 2004,28(4):386-398.

[24] CHIANG S T, TSAI C M, LEE A C. Analysis of cutting forces in ball-end milling [J]. Journal of Materials Processing Technology, 1995,47(3-4):231-249.

[25] 董永亨, 李淑娟, 李言, 等. 基于改进 Z-MAP 算法的球头铣刀加工表面形貌仿真与试验研究[J]. 机械工程学报, 2017(23):197-208.
DONG Y H, LI SH J, LI Y, et al. Simulation and experimental study on machining surface topography of ball end milling cutters based on improved Z-MAP algorithm [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2017(23):197-208.

[26] MONTGOMERY D, ALTINTAS Y. Mechanism of cutting force and surface generation in dynamic milling [J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 1991, 113(2):160-168.

[27] 董永亨, 李淑娟, 洪贤涛, 等. 基于 Z-MAP 方法的球头铣刀铣削力的建模[J]. 机械工程学报. 2019, 55(19):201-212.
DONG Y H, LI SH J, HONG X T, et al. Modeling on the milling force of ball-end milling cutter based on Z-MAP method[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019,55(19):201-212.

作者简介

董永亨,2011 年和 2020 年于西安理工大学分别获得硕士学位和博士学位,现为西安理工大学讲师,主要研究方向为机械加工过程建模及质量控制。
E-mail: DongYongheng@ xaut. edu. cn

Dong Yongheng received his M. Sc. degree and Ph. D. degree both from Xi'an University of Technology in 2011 and 2020, respectively. He is currently a lecturer at Xi'an University of Technology. His main research interests include machining process modeling and quality control.

李淑娟(通信作者),1990 年、2000 年和 2006 年于西安理工大学分别获得学士学位、硕士学位和博士学位,现为西安理工大学教授、博士研究生导师。主要研究方向为机械加工过程建模和直接数字制造技术。
E-mail: shujuanli@ xaut. edu. cn

Li Shujuan (Corresponding author) received her B. Sc. degree, M. Sc. degree, and Ph. D. degree all from Xi' an University of Technology in 1990, 2000, and 2006, respectively. She is currently a professor and a Ph. D. advisor at Xi' an University of Technology. Her main research interests include machining process modeling and direct digital manufacturing technology.