第 42 卷 第 8 期
2021 年 8 月

仪 器 仪 表 学 报
Chinese Journal of Scientific Instrument

Vol. 42 No. 8
Aug. 2021

DOI：10. 19650/j. cnki. cjsi. J2107719

基于频响函数 Neumann 级数展开的有限元模型修正*

赵 宇[1,2]，彭珍瑞[1]
（1. 兰州交通大学机电工程学院 兰州 730070；2. 天水师范学院电子信息与电气工程学院 天水 741000）

摘 要：针对有限元模型修正中测试自由度不完备、求解不适定的问题，提出了一种基于频响函数 Neumann 级数展开的模型修正方法。首先，利用测试和有限元分析模态数据构造完整的实测频响函数。然后，根据 Neumann 级数展开式建立实测频响函数与有限元模型频响函数之间的关系式，以此构建模型修正目标函数。最后，采用改进鲸鱼优化算法求解目标函数获取修正结果。通过平面桁架数值算例表明，该方法具有较强的噪声鲁棒性，模型修正精度较好，15% 噪声时修正后的平均相对误差不超过 1%。利用 4 层剪力框架结构测试算例进一步验证所提方法，结果表明，修正后的模型能反映结构真实状况。

关键词：模型修正；Neumann 级数；频响函数；改进鲸鱼优化算法
中图分类号：TH113. 1 O32 **文献标识码**：A **国家标准学科分类代码**：460. 99

Finite element model updating based on Neumann series expansion of the frequency response function

Zhao Yu[1,2]，Peng Zhenrui[1]
（*1. School of Mechanical Engineering*，*Lanzhou Jiaotong University*，*Lanzhou 730070*，*China*；
2. School of Electronic Information and Electrical Engineering，*Tianshui Normal University*，*Tianshui 741000*，*China*）

Abstract：To solve the problem of incomplete measurement and ill-posed in finite element model updating，a model updating method based on the Neumann series expansion of frequency response function（FRF）is proposed. First，the complete test FRF is calculated by modal data from test and finite element analysis. Then，equations between test FRF and analysis FRF are established according to Neumann series. In this way，the objective function of model updating is formulated. Finally，the modified whale optimization algorithm is applied to obtain the updating results. Numerical examples of a plane truss show that the proposed method is robust to noise and has good precision. With 15% noise，the average relative error after model updating is less than 1%. The method is further validated experimentally with the 4-story shear frame structure. Results show that the updated model can reflect the true status of the structure.

Keywords：model updating；Neumann series；frequency response function；modified whale optimization algorithm

0 引 言

精确的有限元模型（finite element model，FEM）能够为结构优化设计、结构损伤识别和动力响应预测提供可靠基础。但是由于模型误差、边界条件等因素影响，初始有限元模型与实际结构之间存在着一定的差异，这就需要对有限元模型进行修正，使得修正后的有限元模型反映结构的真实状态[1]。

通常，基于振动测试信息的有限元模型修正（finite element model updating，FEMU）方法主要包括基于模态参数和基于频响函数（frequency response function，FRF）的模型修正。相较于模态参数，频响函数测试精度高，并且能够在优化过程中提供更多的数据信息，在模型修正中得到了普遍关注[2-4]。Lin 等[5]提出了基于频响函数灵敏度的模型修正方法。Esfandiari 等[6]利用频响函数和近似线性灵敏度的有限元模型修正方法实现一桁架结构的损伤识别。随后，Shadan 等[7]试验验证了这种基于频响函数线性灵敏度的方法。Guo 等[8]基于应变频响函数相关性灵敏度分析方法建立了模型修正正则方程。但

收稿日期：2021-04-06 Received Date：2021-04-06
*基金项目：国家自然科学基金（51768035）、甘肃省高校协同创新团队项目（2018C-12）资助

基于灵敏度分析的有限元模型修正方法存在不足之处:在建立灵敏度方程时要求测试自由度完备;在求解过程中会存在灵敏度矩阵病态问题表现出不适定性。Hong 等[9]直接以有限元分析和实测 FRF 之间的残差为目标,对一座 4 层剪力框架结构进行修正,结果表明修正后所得 FRF 能很好的与实测 FRF 保持一致。展铭等[10]采用加速度和应变频响函数的相关系数对加筋壁板结构模型进行修正,修正后模型的模态频率、频响函数与试验测试结果对比均有所改善。然而,这类有限元模型修正方法的前提是保证测试信息的完备性。有限元模型修正问题本质上可归结为目标函数优化问题。传统的基于梯度的优化方法会陷入局部最优解,智能优化算法被逐渐用于目标函数的求解中。夏志远等[11]提出了基于高斯白噪声扰动的粒子群优化(Gaussian white noise mutation particle swarm optimization, GMPSO)模型修正方法,对高维有损伤简支梁模型进行修正,并将结果与基于遗传算法(genetic algorithm, GA)的模型修正方法对比,所提算法寻优效率提升显著。杜进生等[12]利用风驱动优化算法(wind driven optimization, WDO)对有限元模型进行修正,结果表明该算法寻优效率高,全局搜索能力强。因此,结合智能优化算法的有限元模型修正方法可以有效提升修正效率。

为解决有限元模型修正过程中测试自由度不完备问题,避免灵敏度矩阵求解的不适定性,本文提出了基于频响函数 Neumann 级数展开的有限元模型修正方法。首先采用测试数据和有限元分析模态数据构建完整的实测频响函数,从而实现自由度匹配。然后,基于 Neumann 级数展开式建立测试频响函数与有限元模型频响函数的关系,构造出模型修正目标函数。随后,利用加入 Gauss 混沌初始化、非线性调整和自适应权重系数等策略的改进鲸鱼优化算法求解修正参数,并通过增加频率点减少噪声影响。最后,以一平面桁架为数值算例和剪力框架试验测试数据验证所提方法。

1　理论方法

1.1　频响函数和 Neumann 级数展开式

对于 n 个自由度结构,其动力学方程可表示为:

$$\boldsymbol{M}\ddot{x} + \boldsymbol{C}\dot{x} + \boldsymbol{K}x = \boldsymbol{f}(t) \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{K}$ 分别为 $n \times n$ 自由度的质量矩阵、阻尼矩阵和刚度矩阵;x、$\boldsymbol{f}(t)$ 分别为位移、外部激励。

式(1)两边取傅里叶变换,得到频域动力学方程:

$$(-\omega^2\boldsymbol{M} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})\boldsymbol{X}(\omega) = \boldsymbol{F}(\omega) \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{X}(\omega)$、$\boldsymbol{F}(\omega)$ 为傅里叶变换;ω 为频率点。

位移频响函数定义为:

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{\boldsymbol{X}(\omega)}{\boldsymbol{F}(\omega)} = (-\omega^2\boldsymbol{M} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K})^{-1} \tag{3}$$

假定结构服役发生只会引起刚度的改变,质量保持不变,并且忽略阻尼变化。刚度矩阵变化为:

$$\Delta\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} - \boldsymbol{K}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} - \sum_{j=1}^{n_{\mathrm{e}}}\alpha_j\boldsymbol{K}_j \tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{K}_{\mathrm{a}}$、$\boldsymbol{K}_{\mathrm{t}}$ 分别为有限元结构整体刚度矩阵和测试结构整体刚度矩阵;n_{e} 为结构单元数;$\boldsymbol{K}_j$、α_j 分别为第 j 个单元单位刚度矩阵和刚度参数,$\alpha_j \in [0,1]$。

将式(4)代入式(3)可得[13]:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega) = (-\omega^2\boldsymbol{M} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} - \Delta\boldsymbol{K})^{-1} \tag{5}$$

由于 $-\omega^2\boldsymbol{M} + \mathrm{i}\omega\boldsymbol{C} + \boldsymbol{K}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}^{-1}(\omega)$,式(5)可表示为:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega) = [\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}^{-1}(\omega) - \Delta\boldsymbol{K}]^{-1} = [\boldsymbol{I} - \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\Delta\boldsymbol{K}]^{-1}\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{I}$ 为 n 维单位矩阵。

根据 Neumann 级数展开式[14],式(6)可表示为:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) + \sum_{s=1}^{\infty}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\Delta\boldsymbol{K}]^s\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) \tag{7}$$

其中,s 为 Neumann 级数展开式迭代次数。

式(7)中,当 $\|\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\Delta\boldsymbol{K}\|_2 < 1$ 时,对于所有 ω,Neumann 级数收敛。结构工程问题中总能满足收敛条件[15]。

Neumann 级数收敛准则[14]为:

$$\frac{\|(\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\Delta\boldsymbol{K})^p\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\|_2}{\|\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega)\|_2} \leqslant \varepsilon \tag{8}$$

其中,$\|\cdot\|_2$ 代表 2 - 范数;阈值 ε 的取值为 0.01 ~ 0.05,本文取 0.01。

测试所得频响函数可表示为刚度变化的函数,实际工程应用中,取式(7)中满足 Neumann 级数收敛准则的前 p 项,即:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega) = \boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) + \sum_{s=1}^{p}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega)\Delta\boldsymbol{K}]^s\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega) \tag{9}$$

1.2　目标函数

对于 m 个频率点 $\omega_1, \cdots, \omega_m$,建立测试与有限元模型近似方程组:

$$\boldsymbol{A}(\alpha) = \begin{Bmatrix} \sum_{s=0}^{p}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega_1)\Delta\boldsymbol{K}]^s\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega_1) \\ \vdots \\ \sum_{s=0}^{p}[\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega_m)\Delta\boldsymbol{K}]^s\boldsymbol{H}_{\mathrm{a}}(\omega_m) \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{b} = [\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega_1), \cdots, \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega_m)]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

则目标函数表示为:

$$\begin{aligned} &\min \|\boldsymbol{A}(\alpha) - \boldsymbol{b}\|_{\mathrm{F}} \\ &\mathrm{s.t.}\ \alpha_{\mathrm{lb}} \leqslant \alpha_i \leqslant \alpha_{\mathrm{ub}}, i = 1,2,\cdots,n_{\mathrm{u}} \end{aligned} \tag{11}$$

其中,$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 代表 Frobenius 范数;α_{lb}、α_{ub} 分别为待修正参数下限和上限;n_{u} 为修正参数个数。

2 测试不完备自由度匹配

对于较复杂结构,由于在实际测试中测试条件的限制,存在结构自由度无法全部测试等问题,测试自由度一般小于结构自由度。本文利用测试模态信息和有限元分析所得信息求取测试频响函数。

频响函数矩阵的叠加形式可表示为:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{t}})^{\mathrm{T}}}{\omega_{\mathrm{t}}^2-\omega^2+2\mathrm{i}\xi_{\mathrm{t}}\omega_{\mathrm{t}}\omega}\tag{12}$$

其中,$\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{t}}$ 为第 r 阶测试模态振型;ω_{t} 为测试固有频率;ξ_{t} 为测试阻尼系数。

由于实际测试无法获取完整模态,将式(12)表示为:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}(\omega)=\sum_{r=1}^{n_{\mathrm{t}}}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{t}})^{\mathrm{T}}}{\omega_{\mathrm{t}}^2-\omega^2+2\mathrm{i}\xi_{\mathrm{t}}\omega_{\mathrm{t}}\omega}+\sum_{r=n_{\mathrm{t}}+1}^{n}\frac{\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{a}}(\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{a}})^{\mathrm{T}}}{\omega_{\mathrm{a}}^2-\omega^2+2\mathrm{i}\xi_{\mathrm{a}}\omega_{\mathrm{a}}\omega}\tag{13}$$

其中,n_{t} 为测试自由度模态阶次;$\boldsymbol{\varphi}_r^{\mathrm{a}}$、$\omega_{\mathrm{a}}$、$\xi_{\mathrm{a}}$ 分别为有限元分析第 r 阶模态振型、固有频率和阻尼系数。式(13)第一部分由测试模态得出;第二部分为未测试自由度上有限元分析所得信息。n_{t} 为感兴趣模态的 3 倍时能够达到精度要求[16]。在实际工程中,通常采集的是加速度数据响应,故本文采用加速度频响函数 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{acc}}(\omega)=-\omega^2\boldsymbol{H}(\omega)$。

3 改进鲸鱼优化算法寻优

3.1 改进鲸鱼优化算法

鲸鱼优化算法(whale optimization algorithm, WOA)是一种基于种群的启发式智能优化算法[17]。WOA 通过模拟座头鲸猎物包围、Bubble-net 狩猎(包括收缩包围机制或螺旋模型)及猎物搜索等机制更新座头鲸即搜索代理的位置捕获猎物。基本 WOA 具有参数少,易操作及收敛速度快等特点,但是 WOA 依然存在易陷入局部极值的缺陷。文献[18]提出了基于 Lévy 飞行行为的鲸鱼优化算法(Lévy flight based whale optimization algorithm, LWOA),并将其用于典型的工程设计优化问题中。本文提出的改进鲸鱼优化算法(modified whale optimization algorithm, MWOA)是在 LWOA 的基础上加入 Gauss 混沌初始化、非线性调整和自适应权重系数等策略,以进一步提高算法的寻优效果。

MWOA 的具体步骤如下:

1) 设置算法参数,鲸鱼种群大小 N、最大迭代次数 $t_{\max}$、参数维数 d、参数的上限 ub 和下限 lb。

2) Gauss 混沌初始化种群。其中,Gauss 混沌映射定义如下:

$$x_{i+1}=\begin{cases}0, & x_i=0\\ \dfrac{1}{x_i}\mathrm{mod}(1), & 其他\end{cases}$$

$$\frac{1}{x_i}\mathrm{mod}(1)=\frac{1}{x_i}-\left[\frac{1}{x_i}\right]\tag{14}$$

3) 计算每个鲸鱼的适应度值,记录当前最优个体 $\boldsymbol{X}^*$。

4) 利用非线性收敛策略 $\left(1-\dfrac{t^3}{t_{\max}^3}\right)$ 更新收敛因子 a 并更新参数 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{C}$。

$$a=\left(2-\frac{2t}{t_{\max}}\right)\left(1-\frac{t^3}{t_{\max}^3}\right)$$
$$\boldsymbol{A}=2a\cdot\boldsymbol{r}-a$$
$$\boldsymbol{C}=2\cdot\boldsymbol{r}\tag{15}$$

其中,t 为当前迭代次数;$\boldsymbol{r}$ 为[0,1]上的随机向量。

5) 当更新概率 $p<0.5$ 且 $|\boldsymbol{A}|<1$ 时,将当前最优鲸鱼位置作为目标猎物位置,通过加入自适应权重系数 $\dfrac{t^3}{t_{\max}^3}$ 的公式更新位置:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\left(\frac{t^3}{t_{\max}^3}\right)\cdot\boldsymbol{X}^*(t)-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}\tag{16}$$

其中,$\boldsymbol{X}(t)$ 表示当前位置向量;$\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}^*(t)-\boldsymbol{X}(t)|$ 为距离向量。

当 $p<0.5$ 且 $|\boldsymbol{A}|\geqslant 1$ 时,鲸鱼加入自适应权重系数,随机游走更新位置:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\left(\frac{t^3}{t_{\max}^3}\right)\cdot\boldsymbol{X}_{\mathrm{r}}(t)-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}\tag{17}$$

其中,$\boldsymbol{X}_{\mathrm{r}}(t)$ 是随机搜索位置向量;$\boldsymbol{D}=|\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{X}_{\mathrm{r}}(t)-\boldsymbol{X}(t)|$。

6) 当 $p\geqslant 0.5$ 时,通过加入自适应权重系数的螺旋方式更新位置,公式如下:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\boldsymbol{D}'\cdot\mathrm{e}^{bl}\cdot\cos(2\pi l)+\left(1-\frac{t^3}{t_{\max}^3}\right)\cdot\boldsymbol{X}^*(t)\tag{18}$$

其中,$\boldsymbol{D}'=|\boldsymbol{X}^*(t)-\boldsymbol{X}(t)|$ 表示搜索代理与目标猎物之间的距离;b 是定义对数螺旋线形状的常量;l 为[-1,1]上的随机数。

7) 基于 Lévy 飞行更新搜索代理位置:

$$\boldsymbol{X}(t+1)=\boldsymbol{X}(t)+\alpha_0(\boldsymbol{X}(t)-\boldsymbol{X}^*(t))\oplus\mathbf{Levy}\tag{19}$$

其中,α_0 为步长控制量;$\mathbf{Levy}\sim\mu/|\upsilon|^{1/\beta}$;$\mu$ 和 υ 服从正态分布;$\mu\sim N(0,\sigma_\mu^2)$;$\upsilon\sim N(0,\sigma_\upsilon^2)$;$\sigma_\mu=\left[\dfrac{\Gamma(1+\beta)\times\sin(\pi\beta/2)}{\Gamma((1+\beta)/2)\times\beta\times 2^{(\beta-1)/2}}\right]^{1/\beta}$;$\sigma_\upsilon=1$;$\oplus$ 表示点对点乘

法;β 为[0,2]之间的随机数。

8) 重复步骤 3)~7),直至达到算法最大迭代次数,输出最优解。

3.2 MWOA 寻优效果

为评价算法的性能,分别采用 WOA、LWOA 和 MWOA 对 Sphere 函数和 Rastrigin 函数进行寻优,其理论最优解均为 0。

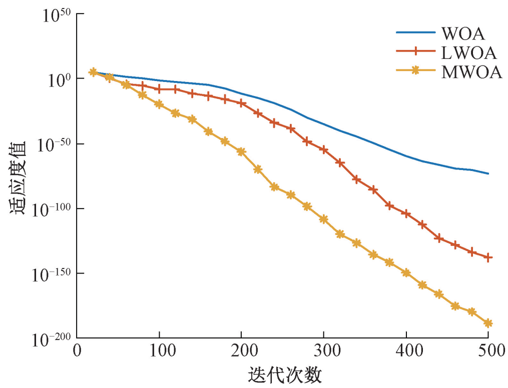
1) Sphere 函数

$$f_1(x)=\sum_{i=1}^{d}x_i^2, x_i\in[-100,100] \tag{20}$$

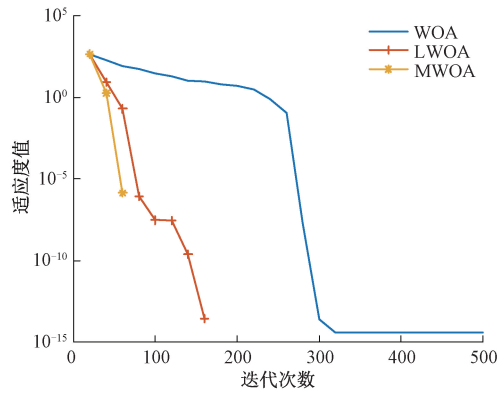
2) Rastrigin 函数

$$f_2(x)=\sum_{i=1}^{d}[x_i^2-10\cos(2\pi x_i)+10],$$
$$x_i\in[-5.12,5.12] \tag{21}$$

WOA、LWOA 和 MWOA 的基本参数设置相同,种群大小 N 为 30,最大迭代次数 $t_{\max}$ 为 500,测试函数的维度 d 为 30。每种算法独立运行 30 次,求出运行结果的平均值。寻优收敛曲线如图 1 所示,为便于观察,纵轴取以 10 为底的指数形式。



(a) 函数 f_1
(a) Function f_1



(b) 函数 f_2
(b) Function f_2

图 1　寻优收敛曲线比较

Fig. 1　Comparisons of optimization convergence curves

从图 1 中可以看到,相较于基本 WOA 和 LWOA,MWOA 在两个测试函数上均展现出了较优的收敛速度和寻优精度。图 1(a)中,WOA、LWOA、MWOA 寻优的均值分别为:5.90×10^{-75}、1.73×10^{-149} 和 6.64×10^{-195},MWOA 最接近于理论最优解。图 1(b)中,MWOA 在迭代 60 次后就到达了理论最小值 0,而 LWOA 需要 143 次,WOA 未能成功寻优。MWOA 在 Lévy 飞行行为的基础上引入 Gauss 混沌初始化策略增加了种群多样性,提升了算法的全局搜索能力,非线性调整和自适应权重系数策略能够协调全局和局部探索开发能力,加快收敛速度,提高算法的寻优精度。因此,将 MWOA 用于有限元模型修正问题中。

综上,本文所提模型修正方法的步骤为:

1) 建立结构有限元模型进行模态分析,得到有限元模型频响函数。

2) 测试实际结构获取模态参数,根据式(13)计算测试频响函数。

3) 构造模型修正目标函数。

4) 选择待修正参数。

5) 设置 Neumann 级数迭代次数 p 及频率点数 m。

6) 利用 MWOA 求解式(11),直至达到 MWOA 最大迭代次数。

7) 输出修正后参数值,得到修正后的有限元模型。

4　数值模型—平面桁架结构

图 2 所示的平面桁架,桁架有 26 个节点和 49 个杆件单元。除节点 1 和节点 25 外,每个节点有 x、y 方向 2 个平动自由度,共 49 个自由度。其参数为:材料弹性模量 E=210 GPa,材料密度 ρ=7 850 kg/m^3,利用 ANSYS 软件建立有限元模型。

4.1　参数灵敏度分析

考虑到结构在服役过程中刚度会有所降低,本文通过降低其单位轴向刚度 EA 以模拟试验模型。利用采样均匀、稳定性、覆盖性较好的 Sobol 序列[19]对 49 个单元的刚度随机采样。以加速度频响函数的 F-范数为指标,基于 Sobol 法进行全局灵敏度分析,结果如图 3 所示。

从图 3 中可以看出,19、22、26、27、31、37、38 和 46 单元灵敏度较高,故选取灵敏度较高的这 8 个单元刚度作为待修正参数,将它们的初始有限元值刚度分别降低 20%、15%、10%、15%、15%、20%、10% 和 20% 来模拟试验值。

由于测试条件的限制,对于自由度较多的结构,不可能获取结构的全部模态,采用式(13)频响函数叠加表达式构造完整频响函数。感兴趣模态为前 4 阶模态,激

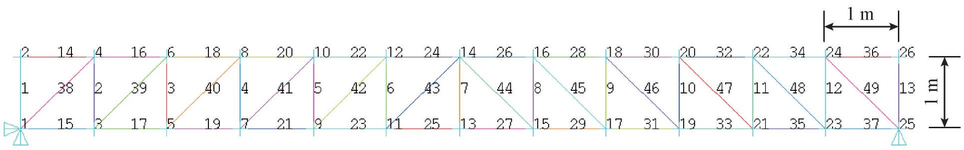


图 2 平面桁架

Fig. 2 Truss structure

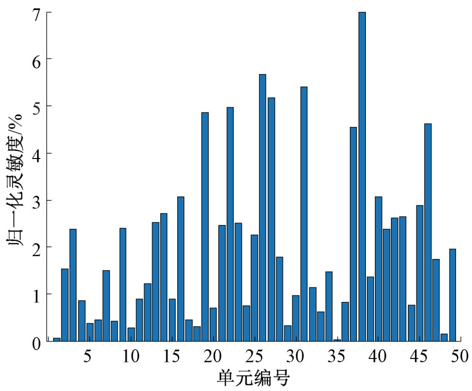


图 3 桁架参数灵敏度

Fig. 3 Sensitivity of truss parameters

励点和测点分别在节点 19、24 的竖向自由度。试验模型及测试模态阶次分别为 6 阶、12 阶的加速度频响函数如图 4 所示。

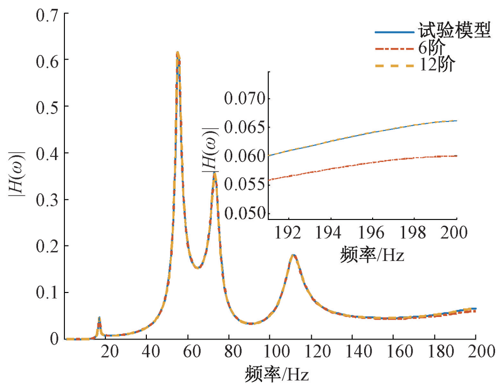


图 4 加速度频响函数曲线

Fig. 4 Acceleration FRF curves

从图 4 中可知,测试模态阶次为 12 阶时所得频响函数与试验模型频响函数差距很小。用此方法能够实现自由度匹配,得到完整的测试频响函数,无需模型缩聚或频响函数扩展。

4.2 Neumann 级数展开模型修正

利用式(9)求拟合频响函数,图 5 为迭代次数 p 为 30 次时,试验模型和 Neumann 级数展开式所得的加速度频响函数。从图 5 中可以看出,除了在共振区,Neumann 级数展开式所得的加速度频响函数与试验值在每一个频率点吻合较好,这是由于激励频率接近结构固有频率时,Neumann 级数不能保证收敛[20]。因此,频率点的选择上要避开共振区。

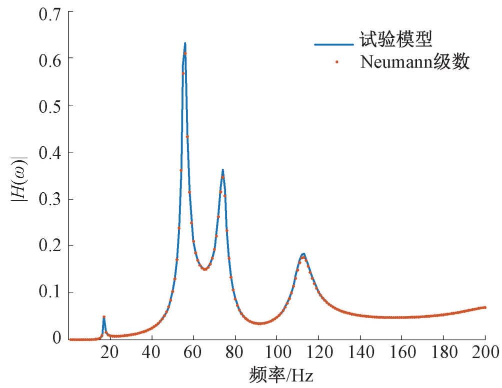


图 5 试验模型和 Neumann 级数展开式所得加速度频响函数曲线

Fig. 5 Acceleration FRF curves of test model and Neumann series expansion

图 6 给出了任意一远离共振区频率点(此处为 100 Hz)的 Neumann 级数收敛曲线。从图 6 中可以得知,随着迭代次数的增加,Neumann 级数很快收敛,迭代 5 次后趋于稳定。此时,按照 Neumann 级数收敛准则式(8)计算所得值为 1.70×10^{-4},远小于阈值 ε。

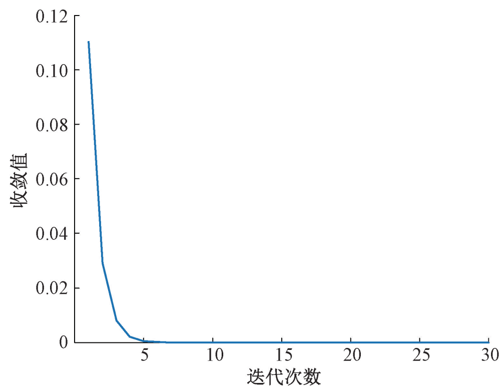


图 6 Neumann 级数收敛曲线

Fig. 6 Convergence curve of Neumann series

综上,取 Neumann 级数迭代次数为 10,远离共振区的频率点为 30 Hz,利用 MWOA 对式(11)进行求解。MWOA 的参数设置:鲸鱼数量为 30,最大迭代次数为 150。图 7 所示为 MWOA 运行 20 次后修正结果平均值。

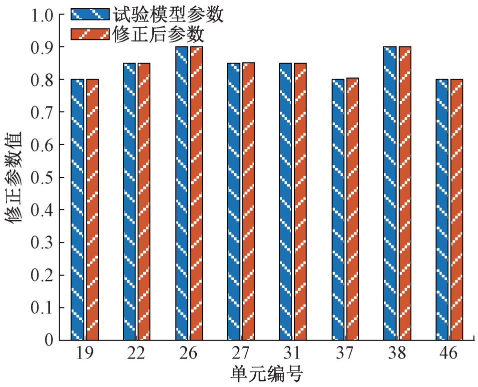


图 7　修正结果

Fig. 7　Result of model updating

从图 7 中可以看出,基于频响函数 Neumann 级数展开的方法可以获得较精确的模型修正结果,修正后的平均误差为 0.11%,最大误差不超过 0.65%。

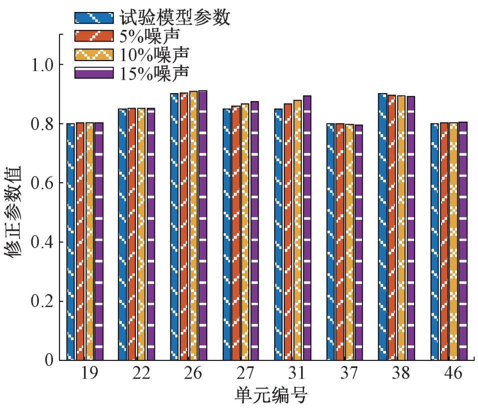
4.3　抗噪性

为进一步验证本文方法的抗噪能力,加入高斯白噪声模拟实测频响函数,噪声表达式为:

$$\boldsymbol{H}(\omega)' = \boldsymbol{H}(\omega)(1 + \beta\eta) \tag{22}$$

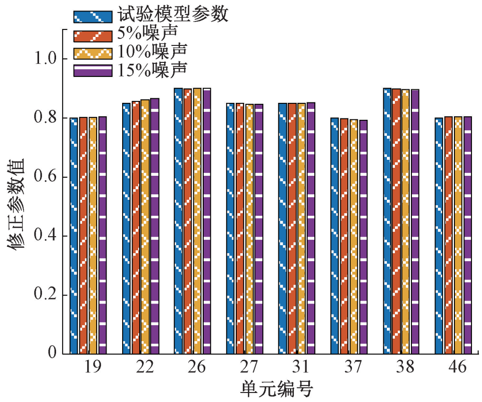
其中,$\boldsymbol{H}(\omega)$、$\boldsymbol{H}(\omega)'$ 分别为加入噪声前后的加速度频响函数;β 为噪声水平;η 为(0,1) 的随机数。本文分别考虑加入 5%、10% 以及 15% 的噪声。

加入噪声后,分别利用 3 个和 6 个远离共振区域的频率点,Neumann 级数迭代次数仍取 10 次,MWOA 参数设置不变。此时的模型修正结果如图 8 所示。



(a) 3个频率点

(a) 3 frequency points



(b) 6个频率点

(b) 6 frequency points

图 8　加入噪声后的修正结果

Fig. 8　Results of model updating with noise

从图 8 中可知,6 个频率点、15% 噪声时修正结果的平均误差为 0.66%,最大误差为 1.78%;而 3 个频率点、15% 噪声的平均误差为 1.47%,最大误差为 5.11%。选择 6 个频率点的整体效果较 3 个频率点修正结果稳定、精度高。增加频率点个数之后,随着噪声水平的增大,修正结果更接近真实试验值,说明所提方法有一定的噪声鲁棒性。

5　剪力框架模型验证

第 4 节的数值模型验证了基于 Neumann 级数展开的方法具有较好的修正效果和噪声鲁棒性,为此通过文献[21]中的 4 层铝制剪力框架分析结果进一步校验该方法的可行性。铝制剪力框架图 9 所示,具体结构参数信息参见文献[21]。

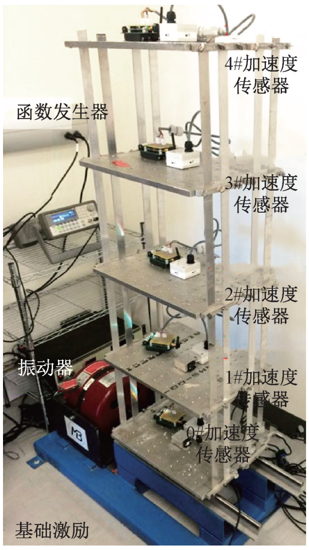


图 9　4 层结构试验模型

Fig. 9　The 4-story structure test model

该模型可简化为 4 自由度的集中质量模型，初始有限元模型每层楼板的质量 $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 12.060$ lb，层间刚度 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 10$ lbf/in。为便于比较，单位与原文相同，采用英制。

根据文献测试模态振型及固有频率获取试验频响函数，取 1 个频率点，Neumann 级数迭代次数为 5。MWOA 参数设置：鲸鱼数量为 30，最大迭代次数为 100。按照模型修正步骤，修正后的层间刚度 $k_1 = 6.995$ lbf/in，$k_2 = 8.120$ lbf/in，$k_3 = 9.091$ lbf/in，$k_4 = 14.648$ lbf/in。图 10 给出了本文所提修正方法与文献[21]中模态动态残差法的结果对比。修正前后的固有频率及误差值如表 1 所示。由图 10 和表 1 可知，与文献[21]方法相比，基于频响函数 Neumann 级数展开的修正方法所得模型更能反映结构真实状况，固有频率误差小于 0.50%。实测数据表明，本文所提方法修正后的模型具有较好的精度。

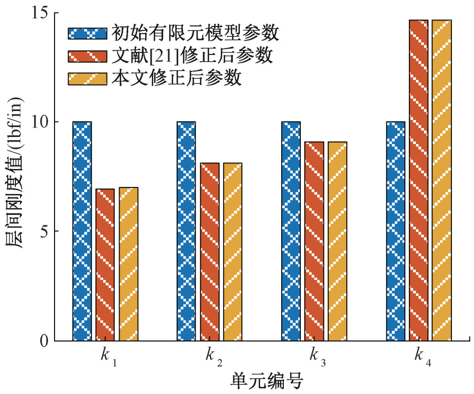


图 10　修正结果对比

Fig. 10　Comparison of updating results

表 1　修正前后固有频率及误差值

Table 1　Frequencies and errors before and after model updating

阶次	试验模型	初始有限元模型		文献[21]修正后模型		本文修正后模型	
	f_t/Hz	f_a/Hz	e_{at}/%	f_{u1}/Hz	e_{ut1}/%	f_{u2}/Hz	e_{ut2}/%
1 阶	0.88	0.99	12.02	0.88	0.70	0.88	0.50
2 阶	2.75	2.85	3.64	2.74	0.45	2.74	0.32
3 阶	4.30	4.36	1.47	4.29	0.13	4.30	0.03
4 阶	5.53	5.35	3.21	5.53	0.04	5.53	0.05

6 结　　论

本文提出了基于频响函数和 Neumann 级数展开式的有限元模型修正方法，通过对数值模型和实测模型的修正，得到以下结论：

1）利用 Neumann 级数可以将实测频响函数表示为有限元模型频响函数和刚度变化的函数。通过增加频率点个数可以提高修正效果及噪声鲁棒性。

2）对于测试不完备自由度不匹配问题，可以使用测试模型模态信息和有限元分析数据近似实测频响函数。

3）加入 Gauss 混沌初始化、非线性调整和自适应权重系数等策略的 MWOA 寻优效率高、寻优能力强。

参考文献

[1] LIU K, YAN R J, GUEDES SOARES C. An improved model updating technique based on modal data[J]. Ocean Engineering, 2018, 154: 277-287.

[2] 梁鹏, 李斌, 王秀兰, 等. 基于桥梁健康监测的有限元模型修正研究现状与发展趋势[J]. 长安大学学报(自然科学版), 2014, 34(4): 52-61.
LIANG P, LI B, WANG X L, et al. Present research status and development trend of finite element model updating based on bridge health monitoring[J]. Journal of Chang'an University(Natural Science Edition), 2014, 34(4): 52-61.

[3] WANG J T, WANG C J, ZHAO J P. Frequency response function-based model updating using Kriging model[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 87: 218-228.

[4] ZHANG Y, HOU Z C. A model updating method based on response surface models of reserved singular values[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2018, 111: 119-134.

[5] LIN R M, ZHU J. Model updating of damped structures using FRF data[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2006, 20(8): 2200-2218.

[6] ESFANDIARI A, BAKHTIARI-NEJAD F, RAHAI A, et al. Structural model updating using frequency response function and quasi-linear sensitivity equation[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 326(3-5): 557-573.

[7] SHADAN F, KHOSHNOUDIAN F, INMAN D J, et al. Experimental validation of a FRF-based model updating method[J]. Journal of Vibration and Control, 2018, 24(8): 1570-1583.

[8] GUO N, YANG Z C, JIA Y, et al. Model updating using correlation analysis of strain frequency response function[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2016, 70-71: 284-299.

[9] HONG Y, PU Q H, WANG Y, et al. Model-updating with experimental frequency response function considering general damping [J]. Advances in Structural Engineering, 2018, 21(1): 82-92.

[10] 展铭, 郭勤涛, 岳林, 等. 基于多响应频响函数的加筋壁板结构模型修正[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2020, 51(5): 1228-1233.
ZHAN M, GUO Q T, YUE L, et al. Finite element model updating of stiffened structure based on multi frequency response functions [J]. Journal of Central South University (Science and Technology), 2020, 51(5): 1228-1233.

[11] 夏志远, 李爱群, 李建慧, 等. 基于 GMPSO 的有限元模型修正方法验证[J]. 工程力学, 2019, 36(10): 66-74.
XIA ZH Y, LI AI Q, LI J H, et al. Validation of finite element model updating methodology based on GMPSO[J]. Engineering Mechanics, 2019, 36(10): 66-74.

[12] 杜进生, 张天能, 周赤伟. 基于二阶泰勒级数展开和风驱动优化算法的结构有限元模型修正[J]. 建筑结构学报, 2019, 40(2): 206-214.
DU J SH, ZHANG T N, ZHOU CH W. Updating of finite element model of structures using second-order Taylor expansion and wind driven optimization [J]. Journal of Building Structures, 2019, 40(2): 206-214.

[13] NIU Z R. Two-step structural damage detection method for shear frame structures using FRF and Neumann series expansion [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 149: 107185.

[14] YAMAZAKI F, SHINOZUKA M, DASGUPTA G. Neumann expansion for stochastic finite element analysis[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(8): 1335-1354.

[15] MUSCOLINO G, SANTORO R, SOFI A. Explicit frequency response functions of discretized structures with uncertain parameters [J]. Computers and Structures, 2014, 133: 64-78.

[16] PU Q H, HONG Y, CHEN L J, et al. Model updating-based damage detection of a concrete beam utilizing experimental damped frequency response functions [J]. Advances in Structural Engineering, 2019, 22(4): 935-947.

[17] MIRJALILI S, LEWIS A. The whale optimization algorithm[J]. Advances in Engineering Software, 2016, 95: 51-67.

[18] ZHOU Y Q, LING Y, LUO Q . Lévy flight trajectory-based whale optimization algorithm for engineering optimization [J]. Engineering Computations, 2018, 35(7): 2406-2428.

[19] 万华平, 任伟新, 王宁波. 高斯过程模型的全局灵敏度分析的参数选择及采样方法[J]. 振动工程学报, 2015, 28(5): 714-720.
WAN H P, REN W X, WANG N B. A Gaussian process model based global sensitivity analysis approach for parameter selection and sampling methods[J]. Journal of Vibration Engineering, 2015, 28(5): 714-720.

[20] 高峰, 孙伟. 改进的 Neumann-LU 混合法在失谐整体叶盘随机分析中的应用[J]. 推进技术, 2018, 39(7): 1626-1632.
GAO F, SUN W. Application of improved hybrid Neumann-LU approach on stochastic analysis of mistuned blisk[J]. Journal of Propulsion Technology, 2018, 39(7): 1626-1632.

[21] LI D, DONG X J, WANG Y. Model updating using sum of squares (SOS) optimization to minimize modal dynamic residuals [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2017(3), DOI:10.1002/stc.2263.

作者简介

赵宇,2014 年于兰州交通大学获得硕士学位,现为兰州交通大学博士研究生,主要研究方向为有限元模型修正。
E-mail: zhaoyulzjtu@163.com

Zhao Yu received her M. Sc. degree from Lanzhou Jiaotong University in 2014. She is currently a Ph. D. candidate at Lanzhou Jiaotong University. Her main research interests include finite element model updating.

彭珍瑞(通信作者),2007 年于浙江大学获得博士学位,现为兰州交通大学教授、博士生导师,主要研究方向为传感器优化布置、有限元模型修正。
E-mail: pzrui@163.com

Peng Zhenrui (Corresponding author) received his Ph. D. degree from Zhejiang University in 2007. He is currently a professor and a Ph. D. advisor at Lanzhou Jiaotong University. His main research interests include optimal sensor placement, finite element model updating.