DOI:10.19650/j.cnki. cjsi. J2413520

融合互信息和多特征约束的激光雷达 与相机外参标定方法*

刘万里1,刘 扬1,张学亮2

(1. 中国矿业大学机电工程学院 徐州 221116; 2. 煤炭工业规划设计研究院有限公司 北京 100120)

摘 要:外参标定是激光雷达与相机数据融合的关键前提,但目前的标定方法仍存在诸多不足,如依赖先验条件、特征约束单一和标定精度不高等问题。为此,提出一种融合互信息与多特征约束的两阶段外参自动标定方法,该方法有机结合了基于互信息和基于多特征约束两种标定方法的优点,可由粗到精自动实现外参精准标定。首先,第1阶段为基于互信息的外参粗标定,即在无初值、阈值等先验条件情况下利用激光雷达反射率与相机灰度值之间的关联性,通过构建最大化模型,在互信息最大时采用自适应梯度最值算法求解出外参的初值,从而摆脱对先验条件的依赖。其次,第2阶段为融合多特征约束的外参精标定,即利用激光雷达和相机获取的点-线、点-面、线-面等多种约束来优化第1阶段获得的外参,并使用 ICP 算法最小化点云 3D 几何特征与图像 2D 几何特征之间的重投影误差,以获得外参的最优值。最后,基于自制的镂空圆形标定板(同时具有点线面特征) 在较为复杂的室内外环境下进行了外参标定试验,结果表明所提出的标定方法可以在没有初值的情况下,能自动计算出的激光雷达与相机外参,同时具有较高的精度和稳定性。

关键词: 激光雷达;相机;外参标定;互信息;多特征约束

中图分类号: TH74 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 460.40

Extrinsic calibration of LiDAR and camera through mutual information integrated multi-feature constraints

Liu Wanli¹, Liu Yang¹, Zhang Xueliang²

(1. School of Mechanical and Electrical Engineering, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China;
2. China Coal Technology & Engineering Group Coal Industry Planning Institute, Beijing 100120, China)

Abstract: Extrinsic calibration is a key prerequisite for the data fusion of LiDAR and camera. However, the current calibration methods still face several challenges such as dependence on prior conditions, single feature constraints, and low calibration accuracy. To address these issues, this paper proposes a two-stage automatic extrinsic calibration method that integrates the mutual information and multi-feature constraints. It combines the advantages of mutual information and multi-feature constraints methods. Firstly, by constructing a mutual information maximization model, the first stage is the coarse extrinsic calibration based on mutual information. This stage obtains the initial extrinsic calibration parameters according to the correlation between LiDAR reflectance and camera grayscale values, not depending on the initial values, set values, or any other prior conditions. Additionally, we design an adaptive gradient algorithm to refine the initial values of the extrinsic parameters. Secondly, the following stage involves the fine calibration of extrinsic parameters with multi-feature constraints, which uses the multiply constraints including the point-to-plane and line-to-plane, to optimize the initial extrinsic parameters obtained from the first stage. Also, the iterative closest point (ICP) algorithm is utilized to minimize the reprojection error between the 3D geometric features of the point cloud and the 2D geometric features of the image. Finally, we conducted the extrinsic calibration experiments in both indoor and outdoor challenging environments using a special-designed hollow circular calibration board, which simultaneously possesses the multi-feature constraints; point, line, and plane. The experimental results proved that the proposed calibration method can automatically and precisely achieve the extrinsic parameters of LiDAR and camera not depending

收稿日期:2024-11-21 Received Date: 2024-11-21

^{*}基金项目:国家自然科学基金项目(52274161)、工信部产业基础再造和制造业高质量发展专项(TC220A04W-1-167Z)资助

on initial values. Additionally, the method exhibits higher accuracy and stability. **Keywords**:LiDAR; camera; external calibration; mutual information; multi-feature constraints

0 引 言

随着当今自动驾驶、机器人技术等领域的不断发展, 对系统能否在复杂环境下实现高稳定、高精度决策能力 的需求日益提升。在这一挑战中。对外界复杂环境的感 知,决定着系统能否满足更高水准的智能化^[12]。然而单 一传感器能够提供的信息不足,如激光雷达能够提供高 精度的三维点云数据,抗干扰性好、不受光照变化影响, 有准确的深度信息,但缺乏色彩和纹理信息。相机作为 最常见的传感器,通过拍照采集目标图像提供丰富的纹 理信息,但相机缺乏深度信息且稳定性差,易受光照、天 气影响。激光雷达和相机数据融合可实现两传感器信息 互补,得到更全面、准确的三维环境信息,被广泛用于自 动驾驶、机器人技术等领域^[34]。

激光雷达和相机数据融合的首要步骤是精确稳定的 外参标定,即确定两个传感器之间的相对位姿关系^[5-6]。 目前常见的外参标定方法大致可以分为两类:基于目标 标定法和无目标标定法^[7-8]。

1)基于目标标定法,指同时在激光雷达和相机数据 中检测人为设计的目标或人为选择特征点,计算目标 在各传感器坐标系下的位姿关系,确定激光雷达和相机 的外部参数。Zhang^[9]提出了基于的棋盘格标定法 仍是一种被广泛采用的传感器外参标定方法之一。 覃兴胜等^[10]提出了基于标定板关键点的激光雷达与相 机外参标定方法,利用点面对应算法求出优化的标定外 参。Song 等^[11]设计了一种具有独特几何特征的辅助标 定装置。Beltrán 等^[12]设计了一款在长方形 4 个角放置 ArUco 码及中间 4 个镂空的圆形标定板对激光雷达与相 机外参进行标定。

2)无目标标定法,指利用自然场景边缘信息或者激 光雷达与相机之间的相对运动关系来完成激光雷达和相 机外参标定^[13]。它不需要在场景中摆放标识物,标定过 程简单,可实现在线标定,又可细分为:基于特征标定方 法和基于运动标定方法。

(1)基于特征标定方法。它要求相机和激光雷达存 在重叠视野,提取重叠区域内的特征(如线特征、面特 征),然后构建目标函数,迭代优化得到外参^[14]。 Bai等^[15]利用平行线对应的3D-2D消失点得到激光雷达 和相机外参旋转矩阵,通过点在线上的约束得到平移矩 阵。Ying等^[16]提出了一种基于运动和边缘匹配的两阶 段校准方法,不需要特殊结构的目标也可得出较精确的 外参。Li等^[17]利用三面正交的场景获取角点,根据点面 的几何关系构建约束模型完成激光雷达和相机外参标 定。

(2)基于运动标定方法。基于运动标定将激光雷达 和相机外参校准视为手眼标定问题,不要求相机和激光 雷达有视野重叠,通过传感器的一串移动序列建立齐次 变换方程,反解出外部标定参数。Huang 等^[18]提出一种 基于 Gauss-Helmert 估计范式的外参标定方法,并给出了 多传感器运动约束公式。Taylor 等^[19]提出了一套适用于 任何系统由激光雷达、相机和导航传感器构成的校准方 法。首先对每个传感器的连续帧进行校准,然后利用传 感器之间运动联系实现外部参数标定。

总体而言,虽然基于目标标定法和无目标标定法可 以实现激光雷达和相机的外部参数标定,但仍存在以下 局限性^[20-25]。

 基于目标标定法需要在场景中人为设置标识物, 标定过程较为繁琐,需要进行标定板位置的摆放、同名特 征手动标记等操作,自动化程度较低,标定精度不稳定。

2)无目标标定法的精度低,标定结果易受环境信息、 外参初值、特征提取、运动轨迹等因素干扰,稳定性不足。

3)目前标定过程中常采用单一几何特征进行约束, 导致约束条件不够,易受到非线性误差的影响,外参标定 精度不高。

针对上述局限性,迫切需要研发一种既能保证激光 雷达与相机外参标定的精度和稳定性,又能提升自动化 程度并不依赖先验条件的方法来解决以上存在的问题。

为此,提出一种融合互信息与多特征约束的两阶段 外参自动标定方法,该方法有机结合了基于互信息和基 于多特征约束两种标定方法的优点。其中基于互信息标 定方法也属于无目标标定的范畴,它是利用雷达反射率 与相机灰度值之间的关联性,并在全局关联性最大化时 自动确定外参初值不依赖先验条件,避免标定过程中发 生局部收敛。

本研究主要包括3部分:数据获取,特征提取和两阶 段外参标定,其创新性主要体现在以下两个方面:

1)该方法有机结合了互信息与多特征约束两种标定 技术的优点,可由粗到精两阶段自动实现外参精准标定。 粗标定时,无需提供外参初值,利用互信息最大化自动获 取外参初值;精标定时,利用多特征约束优化第一阶段获 得的外参,通过最小化重投影误差精确获得外参的最 优值。

2)该方法融合两种或多种几何特征约束信息,建立 了包含点-线、点-面、线-面等多种特征约束的外参标定 数学模型,保证了外参标定结果的精确性与稳定性。

1 外参标定问题描述

本研究的整体研究思路如图 1 所示,激光雷达与相机 的联合外参标定的本质在于确定激光雷达与相机之间的 相对位置和姿态关系,使其两者能够在共同的坐标系下进 行数据融合和协同处理。如图 2 所示,在激光雷达和相机 外参标定坐标系中共有 4 类坐标系,分别为:激光雷达坐 标系(*L*)、相机坐标系(*C*)、世界坐标系(*W*)与像素坐标系 (*P*)。在外参标定中,其坐标转换关系可由式(1)表示。







图 2 激光雷达和相机外参标定原理 Fig. 2 Schematic diagram of LiDAR and camera external parameter calibration

 $p_c = (\boldsymbol{R}_L^c \quad \boldsymbol{t}_L^c) \boldsymbol{P}_L \tag{1}$

式中: $p_c = (X_c, Y_c, Z_c)^{\mathsf{T}}$ 表示观测目标在 C 系下的坐标,这需要将 W 系下的观测目标坐标反投影至 C 系下获得; $P_L = (X_L, Y_L, Z_L)^{\mathsf{T}}$ 为L 系下坐标; $(\mathbf{R}_L^c \ \mathbf{t}_L^c)$ 分别表示 L 系到 C 系所需的旋转矩阵与平移向量,亦为所求外参。

在标定精确的情况下,式(1)变换后的两坐标系应 该重叠,即激光雷达的点云轮廓与相机图像应完全重合 (图3(a))。然而在实际操作中,由于外参初值设置不 当,标定算法本身精确度不足等都会使最终的标定结果 出现局部收敛现象,导致激光雷达与相机的坐标系之间 无法对齐,如图3(b)所示,激光雷达与相机图像投影产 生偏差。此时,激光雷达与相机的外参标定结果无法被 投入使用。因此,激光雷达与相机在数据融合前,需要对 其进行精确外参标定。



(a) 完全重合图像特征 (a) Exact coincidence of image features



(b) 未完全重合图像特征(b) Image features that do not coincide exactly图 3 激光雷达与相机图像投影对比



2 数据获取

2.1 特殊标定板设计

为了满足本研究算法同时对点、线,面特征的需求, 本文设计了一款新型标定板,其由棋盘格、镂空圆与增强 现实标记码(augmented reality university of cordoba, ArUco)共同构成。其中,棋盘格与镂空圆为算法可同时 提供丰富的点、线、面特征,确保算法的精确性与稳定性, ArUco 码自身独特的编码信息能够简化算法的检测与识 别过程,也提高了算法自动化水平。使外参标定在单帧 视图下仍能得到较好的结果,标定板样式如图4所示。



图 4 特殊标定板样式 Fig. 4 Schematic diagram of the style of the special calibration plate

所设计新型标定板规格为 1.0 m×0.9 m,板上镂空 圆形半径为 10 cm,棋盘格边长规格为 5 cm,于四周构成 7×6 的棋盘。

2.2 点云分割与优化

雷达获取的数据将首先进行环境点云的去除,通过 滤波技术提升点云质量,再利用平面拟合方式完成对标 定板点云的分割。由于本研究的固态雷达采用非重复式 扫描模式来获取空间中的点云信息,这使得单次扫描的 数据过于稀疏,难以观测到标定板上的特征信息,虽可以 利用点云叠加的方式致密,但每帧数据中的异常值也将 被保留,点云噪声的累加会导致最终点云过于模糊,传统 的随机一致性算法(random sample consensus, RANSAC) 所获得的效果不佳。

为此,提出对 RANSAC 算法进行改进,在原有的基础上融合法向信息进一步提高算法去除异常值的能力, 其原理可由图 5 表示。





1) 将滤波降噪后的点云后的点云集记为 $P^{f} = \{P_{1}^{f}, P_{2}^{f}, \dots, P_{n}^{f}\}, 首先利用 RANSAC 算法进行平面拟合; 于 <math>P^{f}$ 中随机选取一定量的点云,构建当前数据下的平面 模型。

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{2}$$

式中: A、B、C和D均为常系数, A、B、C决定着平面模型的方向, D为沿平面模型法线方向上移动的常数。

然后,以此平面为基础,计算点云集内各点距离平面的欧式距离,为剔除点云集中的偏移点,距离阈值 d_i 将被定义,以判断各点是否为模型样本内点。对判断过程进行重复,选取内点数量最多的平面为最优模型,将最优模型作为标定板点云平面,记为 $P^m = \{P_1^m, P_2^m, \dots, P_n^m\}$ 。

2) 于 P^m 中任选一点云,则该点云的领域中心可表 示为:

$$\bar{P}^{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_{i}^{m}$$
(3)

式中: P^m 表示所选邻域中心坐标; n 为所选邻域中点的 个数。

利用主成分分析法^[24] (principal component analysis, PCA) 建立 $\bar{P}^m \models P_i^m$ 间的协方差矩阵,根据 $\bar{P}^m \models P_i^m$ 之间 的欧式距离决定 P_i^m 在协方差矩阵中的权重大小,将协方 差矩阵写为:

$$Cov = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \zeta_i \parallel P_i^m - \bar{P}^m \parallel$$
(4)

式中: ζ_i 表示 P_i^m 所占据的权重,这与距 \bar{P}^m 的欧式距离成反比。

对式(4)进行特征值分解,假设得到的特征值为 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \pm 0 \le \lambda_0 \le \lambda_1 \le \lambda_2, 则 \lambda_0$ 所对应的单位特 征向量即为 P^m 的平面法向量 n_L 。

3) 对 P^m 中的每一点进行遍历,找到其 k 个最近邻 点,并利用最近邻点的坐标值计算出局部拟合平面,该平 面的法向量即为查询点的法向量,记为 $n(P_i^m)$ 。

最后,根据式(5)计算出点云中点的法向量与 n_L 的夹角。

$$\theta_i = \arccos \frac{\langle \boldsymbol{n}_L, \boldsymbol{n}(P_i^m) \rangle}{\|\boldsymbol{n}_L\| \cdot \|\boldsymbol{n}(P_i^m)\|}$$
(5)

式中: θ_i 表示第*i*个点法向量与平面法向量 \mathbf{n}_L 的夹角。

选定角度阈值 θ_i ,若 $\theta_i \leq \theta_i$ 则表示法向量在运行的 范围内,该点可视为标定板内点,否则将其视为法向量异 常点,为了保证标定板点云的精确性,异常点将被剔除, 最终得到的点云集即为标定板点云。

针对非重复式扫描带来的不均匀性的影响,本文采 用控制点云密度的方式来进行处理。将优化后的每一帧 点云进行叠加,最终得到特征明显的点云合集记为 $P^{u} = \{P_{1}^{u}, P_{2}^{u}, \dots, P_{n}^{u}\}$ 。

3 特征提取

3.1 激光雷达点云特征提取

在获取 P^* 后,利用激光对不同颜色的棋盘格的反射 强度不一致完成对角点的提取,为了能够对反射强度进 行自适应处理,设立灰度区域[η_1,η_2] 解决距离带来的 误差影响。当反射强度小于 η_1 时,将其作为黑色区域反 射的数据,大于 η_2 则认为来自空白区域。 η_1,η_2 由强度 峰值确定,定义如式(6) 所示。

$$\begin{cases} \eta_1 = ((\varepsilon_g - 1)R_1 + R_2)/\varepsilon_g \\ \eta_2 = ((\varepsilon_g - 1)R_2 + R_1)/\varepsilon_g \end{cases}$$
(6)

式中: ε_s 为常数,用以角点估计与误差评估; R_1 , R_2 为强度峰值。

接着对点云集进行网格化,并对每个格点检测周围 反射强度以判断角点,基于反射强度与棋盘颜色之间对 应关系之间的约束建立成本函数,完成对角点的提取,并 将提取到的角点点云集记为 *P*_i。

针对镂空圆心在雷达坐标系中的位置,利用深度信息进行拟合。由于镂空圆上的点在点云中并不连续,其 深度信息在边缘处会出现断层现象,对于 P"中的点,其 深度信息可由式(7)表明。

 $P_{i,\Delta}^{u} = \max(P_{i-1,d}^{u} - P_{i,d}^{u}, P_{i+1,d}^{u} - P_{i,d}^{u}, 0)$ (7) 式中: $P_{i,\Delta}^{u}$ 为 P_{i}^{u} 的深度差; $P_{i,d}^{u}$ 为 P_{i}^{u} 处深度值; $P_{i-1,d}^{u}$, $P_{i+1,d}^{u}$ 为同一扫描线上相邻点的深度值, 在镂空圆边 缘处, 将出现深度值突变的现象, 如图 6 所示。



图 6 点云圆心坐标检测 Fig. 6 Schematic diagram of point cloud circle center

coordinate detection

将提取到的圆心为 $P_{i,0}(x_i, y_i, z_i)$, 包含在圆心点云 集 P_i^o : {i = 1, 2, 3, 4}。

记录下所采集的镂空边缘点 $P_{i,o}$,利用 $P_{i,o}$ 的坐标位 置求 解 出 $P_{i,o}$ 所 在 圆 的 圆 心 坐 标 $P_{v}(x_{0}, y_{0}, z_{0})$ 。 $P_{v}(x_{0}, y_{0}, z_{0})$ 由式(8) 得出。 $\begin{cases} r^{2} = (x_{1} - x_{0})^{2} + (y_{1} - y_{0})^{2} + (z_{1} - z_{0})^{2} \\ r^{2} = (x_{2} - x_{0})^{2} + (y_{2} - y_{0})^{2} + (z_{2} - z_{0})^{2} \\ r^{2} = (x_{3} - x_{0})^{2} + (y_{3} - y_{0})^{2} + (z_{3} - z_{0})^{2} \end{cases}$ (8)

式中:r为 P_{o} 所在圆半径,这由标定板尺寸确定,本研究中r=10 cm。

综上,完成了对于标定板点云的特征点提取,然而单 一的点特征会使得点之间的关系和组织会产生缺失,无 法获取更丰富的特征信息,因此,将在点的基础上加入线 面特征以增强信息的表达能力。

对于点云中的线特征,以 P_a为基点,取标定板圆心 点云集 P^o_i中的点云坐标,以式(9)建立两点间直线方 程,取直线方程的单位方向向量作为 L 系下的线特征。

将线特征的集合记为 k_i^L :{i = 1, 2, 3, 4}。

$$\frac{x - x_0}{x_i - x_0} = \frac{y - y_0}{y_i - y_0} = \frac{z - z_0}{z_i - z_0}$$
(9)

对于点云中的面特征,2.2 节中已求出标定板点云 的平面法向量 n_L ,将以平面法向量建立起面与面之间的 约束。

3.2 相机图像特征提取

首先通过 ArUco 码进行快速定位,针对图像中的点特征,本文并利用 Shi-Tomasi^[23]检测算法提取角点,计算 图像中每个像素点的梯度信息,并综合梯度信息给出对 每一个像素点的响应函数如式(10)所示。

 $PX = \min(\mu_1, \mu_2)$ (10) 式中: μ_1, μ_2 为像素点周围特征值,对所有像素点的响应 值进行排序,最高响应值的像素点将被作为角点。

以 Canny 边缘检测算法^[26]获取图像中的镂空圆坐标, 计算边缘二值图,并将初始圆心位置设为 N(a,b)=0,沿梯 度方向经过的点累加, N(a,b) 的最大值即为圆心所在。

将求取的二维像素信息恢复到三维坐标下,利用透视 n 点(perspective-n-point,PnP)获取 W 系与 C 系的转换 参数(\mathbf{R}_{W}^{c} \mathbf{t}_{W}^{c}),以反投影的方式求出特征点在 C 系下的 三维坐标。

 $p_c = \boldsymbol{R}_W^c \boldsymbol{P}^W + \boldsymbol{t}_W^c \tag{11}$

式中: p_c 表示 C 系下坐标三维点, P^w 为同质点在 W 系下的坐标, R_w^c 和 t_w^c 分别表示将坐标从世界坐标系转换到相机坐标系的旋转矩阵与平移向量。

然后,在角点转换后将其记为点集合 p_i : {i = 1,2, …,n}中,圆心记为 $p_{i,o}$,包含在点集合 p_i^o : {i = 1,2,3,4} 中;并利用式(8)求解出 p_i^o 所在圆的圆心坐标 p_v^o 。

取 p_i^o 中的点构建直线方程,取直线方程的单位方向 向量作为C系下线特征。并将C系下的线特征集合记为 $k_i^c: \{i = 1, 2, 3, 4\}$ 。

在 W 系下,标定板平面的单位法向量被设为

 $\boldsymbol{n}_{W} = (0,0,1)^{\mathrm{T}}$,根据($\boldsymbol{R}_{W}^{c} \quad \boldsymbol{t}_{W}^{c}$)可求得 *C* 系下平面法向量为:

$$\boldsymbol{n}_{c} = \boldsymbol{R}_{W}^{c} \boldsymbol{n}_{W} \tag{12}$$

式中: n_c 表示标定板在 C 系下的平面法向量。

4 两阶段外参标定

4.1 基于互信息关联最大化的粗标定

Sun 等^[25]的研究表明,在实际的室内/室外校准场景中,图像灰度与激光雷达反射率之间存在着高度相关性, 在不存在大片阴影的环境下,能够胜任外参标定任务。 首先利用互信息最大化的方式求解出第1阶段的全局最 优解。详细的算法流程下。

1) 输入点云的反射率与同质点的像素;

2) 获取两者的概率密度,并进行边缘与联合熵的 获取;

3)建立起点云与像素之间的互信息统计相关性,并 获取代价函数;

4)通过最陡梯度算法对代价函数迭代计算,最终获
 得第1阶段的粗标定外参。

在本研究中,将点云与之投影至像素坐标系上的对 应点记为同质点,以 h_i 表示。同质点的反射率与灰度被 记为 x_i 与 y_i ,则所有同质点的反射率与灰度为 $X = \{x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ 与 $Y = \{y_i, i = 1, 2, \dots, n\}$,其范围都在 [0,255]之上。

依靠互信息原理,建立起*X*,*Y*的统计相关性如下,外参的精确度越高,两者之间的关联性越大。

MI(X,Y) = H(X) + H(Y) - H(X,Y) (13) 式中: $H(\cdot)$ 表示随机变量的熵,定义为:

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_X(x_i) \log p_X(x_i)$$
(14)

$$H(Y) = -\sum_{i=1}^{n} p_{Y}(y_{i}) \log p_{Y}(y_{i})$$
(15)

$$H(X,Y) = -\sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} p_{XY}(x_i, y_i) \log p_{XY}(x_i, y_i)$$
(16)

式中: $p(\cdot)$ 表示随机变量的概率分布; $p_x(x) 与 p_y(y)$ 为反射率和灰度为x,y时的概率,其边缘分布概率以及联合分布概率的求解方法由式(17)~(19)给出。

$$p_{X}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_{\omega}(x - x_{i})$$
(17)

$$p_{Y}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_{\omega}(y - y_{i})$$
(18)

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_{\Omega}\left(\begin{bmatrix} x\\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i\\ y_i \end{bmatrix}\right)$$
(19)

式中: K_{ω} 与 K_{Ω} 为边缘概率分布和联合概率分布的核函数,由 X 和 Y的标准差确定。

在正确的外参下,同质点之间的反射率与灰度值之间,互信息关联性将达到最大,于是外参的求解可表示为:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \operatorname{argmax} MI(X, Y; \boldsymbol{\Theta})$$
(20)

式中: $\boldsymbol{\Theta} = [x, y, z, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\psi}]^{\mathrm{T}}$,其内参数分别表示外参矩 阵的平移量与旋转量,可以将外参矩阵表示为:

$$\boldsymbol{T}_{1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{1} & \boldsymbol{t}_{1} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{bmatrix}$$
(21)

式中: $\mathbf{R}_1 = [\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\varphi}]$ 为外参矩阵 \mathbf{T}_1 的旋转部分, $\mathbf{t}_1 = [x, y, z]^T$ 为 \mathbf{T}_1 的平移部分。

可以将式(21)中的 *MI*(*X*,*Y*;*Θ*) 通过概率密度进行 表示,并将最终的外参求解写为:

$$\hat{\boldsymbol{\Theta}} = \operatorname{argmax}_{x \in X, y \in Y} p_{X,Y}(x,y) \log_2 \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)p_Y(y)}$$
(22)

最陡梯度算法能够使计算过程沿函数的梯度方向进行,使得迭代过程尽可能缩短,利用最陡梯度算法来进行 互信息全局最优解的计算,并在保留 BB(Barzilai-Borwein)算法^[27]的自适应步长的基础上,提出结合 Nesterov算法^[28]的超前思想,改进算法的梯度方向,其具 体实现过程与原理示意如图7所示。





若将代价函数的梯度表示为:

$$\nabla \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta}_k) = \nabla MI(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}; \boldsymbol{\Theta}_k)$$
(23)

式中: $\nabla MI(\cdot)$ 表示输入变量 $\boldsymbol{\Theta}_{k}$ 的梯度值。

则根据梯度下降算法,可以将 k + 1 次迭代的估计值 与动量写为:

$$\boldsymbol{\Theta}_{k+1} = \boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\gamma}_k \boldsymbol{V}_{k+1} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{V}_{k+1} = \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{V}_k + (1 - \boldsymbol{\beta}) \nabla \boldsymbol{J} (\boldsymbol{\Theta}_k + \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{V}_k)$$
(25)

式中: Θ_k 表示第k次迭代后的估计值; $\nabla J(\Theta_k)$ 为代价函数在 Θ_k 处的梯度; V_k 表示在k次时的动量,通过动量进行收敛方向的调整可以加速收敛与平稳参数更新过程; χ 表示动量的衰减幅度; β 表示常量系数,相当于对历史数据进行加权求和,距离当前越近的数据权重越大,反之 权重越小;γ_k表示步长,可由式(26)确定。

$$\boldsymbol{\gamma}_{k} = \frac{\Delta \boldsymbol{\Theta}_{k}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{\Theta}_{k}}{\Delta \boldsymbol{\Theta}_{k}^{\mathrm{T}} \Delta \boldsymbol{J}_{k}}$$
(26)

 $\vec{x} \oplus : \Delta \boldsymbol{\Theta}_{k} = \boldsymbol{\Theta}_{k} - \boldsymbol{\Theta}_{k-1}; \Delta \boldsymbol{J}_{k} = \nabla \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta}_{k}) - \nabla \boldsymbol{J}(\boldsymbol{\Theta}_{k-1})_{\circ}$

图 7 中长点画线表示在未对梯度方向修正时的迭代 方向,双点划线代表该点的动量方向,它由历史数据而决 定,点划线表示经修正后的梯度方向,用于实现代表修正 后的下降过程。可以看出,改进后的算法不仅在步长上可 以进行自适应调整,同时也能根据当前数据进行预测,从 而使迭代更优。在本研究中,迭代后的最终值将使用迭代 最近点算法(iterative closest point, ICP)进一步优化。

4.2 基于 ICP 算法的精标定

基于互信息关联最大化的第1阶段外参标定可以实 现激光雷达与相机的初次配准,然而由于互信息这种无 目标标定方式本身的限制,其标定精度上仍有着较大的 进步空间,外参标定结果有待进一步优化。针对这一问 题,选择只关注标定板的局部特征,利用 ICP 配准算法, 通过特征点、线与平面法向量建立误差函数,对外参二次 标定,详细算法流程为:

1)输入互信息所得的一阶段外参,并通过外参对相应的特征集进行匹配;

 2)误差函数建立,构建起点特征之间的误差函数, 构建起向量特征之间的误差函数;

3) 计算目标误差函数的变换矩阵,并迭代优化使误 差最小化;

4)判断误差是否到达阈值,若是,则输出此时的最 终外参,若否,则返回3)继续迭代。

首先,传入经互信息最大化所得到得第1阶段外参 T_i ,将激光雷达与相机的特征集进行配准,以 P_i 为例, 经 T_iP_i 后,于 p_i 内进行最近邻搜索,建立特征集的对应关系。

在 T_1 转换后的基础上,针对角点特征集 P_i 与 p_i ,圆 心特征集 P_i^o 与 p_i^o ,计算彼此在外参系数 T_1 下转换时的 欧式距离误差,建立如式(27)的误差函数。

$$\begin{cases} E_{point}(\mathbf{R}, t) = E_{1}(\mathbf{R}, t) + E_{2}(\mathbf{R}, t) \\ E_{1}(\mathbf{R}, t) = c_{1} \sum_{i=1}^{n} || \mathbf{R}P_{i} + t - p_{i} ||^{2} \\ E_{2}(\mathbf{R}, t) = c_{2} \sum_{i=1}^{n} || \mathbf{R}P_{i}^{0} + t - p_{i}^{0} ||^{2} \end{cases}$$
(27)

式中: $E_{point}(\mathbf{R}, t)$ 为点特征的误差函数; $E_1(\mathbf{R}, t)$ 、 $E_2(\mathbf{R}, t)$ 分别为角点与圆心特征集的误差函数; c_1, c_2 为 各自所占权重,依据集合中点的数量而定; (\mathbf{R}, t) 为在此 对应关系下所要求解的外参。

针对线向量特征集 $k_i^L = k_i^C$,建立如式(28)的误差 函数,计算彼此在外参系数 T_1 下转换时的角度误差。

$$E_{line}(\boldsymbol{R}) = c_3 \sum_{i=1}^{n} \arccos(\boldsymbol{k}_i^L \boldsymbol{k}_i^C)$$
(28)

式中: *E*_{line}(**R**)为向量特征的误差函数; *c*₃为线向量所占权重,依据向量的数量而定。

针对平面法向量 n_L 与 n_c ,建立如式(29)误差函数, 计算在外参系数 T_1 下转换时角度误差:

$$E_{plant}(\boldsymbol{R}) = c_4 \arccos(\boldsymbol{n}_L \boldsymbol{n}_C)$$
(29)

式中: $E_{plant}(\mathbf{R})$ 为平面法向量特征的误差函数; c_4 为平面法向量所占权重,依据向量的数量而定。

综上,建立起总误差函数为:

 $E_{all}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}) = E_{point}(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{t}) + E_{line}(\boldsymbol{R}) + E_{plant}(\boldsymbol{R}) \quad (30)$

由此,将外参求解转化为计算满足误差函数 min[$E_{all}(\mathbf{R},t)$]的最优解(\mathbf{R},t)问题。然后利用奇异值 分解(SVD)的方法对其进行求解,以角点部分为例进行 求解过程说明如下:

1) 去中心化处理,即求得角点坐标质心。

$$\overline{P} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} P_i$$

$$\overline{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p_i$$
(31)

计算各点对于质心的位移。

2)利用质点位移进行协方差矩阵的计算,并对协方 差矩阵进行奇异值(SVD)分解。

$$\boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Q}_{i}^{L} (\boldsymbol{Q}_{i}^{C})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{U} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$
(33)

式中:U、V都为3×3矩阵,它们由(HH^{T}),($H^{T}H$)的特征向量构成, Λ 为奇异值矩阵,通过求解每个奇异值即可得到。

3) 基于矩阵 *U*,*V*,便可对旋转矩阵 *R* 进行求解,即 *R* = *VU*^T,代回式(27)即可求出平移向量,最终得出外参 矩阵为:

$$\boldsymbol{R} \quad \boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}} & \bar{p} - \boldsymbol{V}\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}\bar{P} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$
(34)

将计算得出的 (**R** t) 应用于特征点集与特征向量 集,重新进行对应点匹配,并对点的欧式距离以及向量的 角度误差进行计算。设立阈值 $e, \exists E_{all} > e$ 时,则对此过 程进行重复,直至 $E_{all} \leq e$,将此次计算的(**R**,t) 结果作为 最终的外参矩阵(**R**₂,t₂) 输出。

5 试验与分析

实验将在 Ubuntu20.04 系统下开展,实验设备选用 Livox Mid-70 激光雷达与 Intel RealSense D435i 相机,其 中 Intel RealSense D435i 相机仅用于二维图像的采集,将 两者安装在自主设计的手持支架上,两者的坐标系关系 与场景示意如图 8。



(a) 试验场景布置 (a) Test scene layout



(b) 坐标转化关系 (b) Coordinate transformation relationship

图 8 设备组成与坐标关系

Fig. 8 Relationship between device composition and coordinates

为验证所提方法的有效性,分别在室内和室外环境下 进行激光雷达与相机的外参标定实验。为了增强最后结 果的说服力,实验中设置了不同方法的对比实验。

本研究选择将单独使用互信息最大化法、点特征匹 配法与线特征匹配法作为对比实验,以此说明提出的两 阶段、多约束方法所做出的贡献。实验流程为:

 在室内与室外环境下分别记录激光雷达与相机 当前位置的点云和图像数据,保持标定板位置不变,改变 激光雷达与相机的观测位置,重复4次,于5个不同的观 察位置下取得每一次的数据集。

2)分别使用上述的各种方法与所提方法进行标定, 获取该方法下的外参值,并改变初始时刻给与的外参初 值,进行重复标定,记录下不同初值时的标定结果。

5.1 室内标定试验

首先,将点云通过标定后的外参矩阵投影至像素坐标系以获取残差向量r,通过其统计量定量判断单独使用互信息最大化方法、点特征匹配法(intensity-based lidar camera calibration,ILCC)、线特征匹配法与所提方法的标定效果。并在室内开展5组实验,以折线图的形式给出每种方法残差统计量的平均值。具体结果如图9所示,图中横坐标表示第几组实验,纵坐标表示残差大小。



图 9 室内环境下残差结果对比

Fig. 9 Comparison of residual results in indoor environment

以表格的形式给出各方法在不同残差下的占比,为 了使数据更具有代表性,将各组数据进行求取均值,其结 果如表1所示。

表 1 室内不同方法所占残差比例 Table 1 Proportion of residuals for different indoor methods

方法	均值	残差占比/%				
	/pixel	r < 0.5	r < 1	<i>r</i> < 5	r < 10	
基于 MI	9.77	1.89	3.93	39.34	60.15	
基于 ILCC	4.76	5.64	10.60	59.40	90.60	
基于线	3.20	12.42	23.76	76.91	95.43	
本文方法	1.80	16.66	32.46	99. 52	100	

由表1可看出,单独使用互信息最大化的方法进行标定时,其平均残差大小为9.7 pixels,约有60%的残差被控制在10 pixels内,这证明了在精确度上仅用互信息最大化的方式有着较大的进步空间;基于标定板的 ILCC 在精度上有所上升,其平均残差大小为4.7 pixels,且绝大部分残差<10 pixels(90.60%);基于线特征的方法进一步提高了结果的精度,其残差均值为3.2 pixels;相比之下,本研究的方法在标定精度上取得了更好的效果,每一组的平均残差都控制在2 pixels左右(相对于单独使用互信息最大化法,平均残差下降了8 pixels),其中峰值大小在5 pixels左右,仅有极少部分的重投影残差>5 pixels(0.48%)。这验证了本研究方法的精确性与稳定性。

基于线特征的方式依靠不断迭代缩小残差,这需要 可靠的外参初值作为保证,否则很容易造成局部收敛的 现象发生。因此接下来的试验将验证基于线特征与本研 究方法在不同程度初值变化下算法的有效性,在上述已 求得精确外参的基础上,通过改变旋转矩阵与平移向量 来实现初值变换的模拟,在对比试验中,3个方向的旋转 角度最大变换范围被控制在 8°,最大平移量被控制在 8 cm,3 个轴上的旋转与平移变化将同时同比例发生。 将不同观测位置下的误差求取均值以确保结果具有代表 性。为判断初值对最终结果的影响,选择不同初值所求 外参矩阵与精确值之间的各旋转轴和各平移量的误差大 小来衡量外参初值的影响,其误差对比如图 10 所示。





由图 10 可以看出,在变化量为 2 与 3 时,基于线特 征方法与本方法都能起到较好的标定效果(旋转误 差<1°,平移误差<1 cm),但当变化量从 4 开始,基于线 特征的方式出现了很大的误差突变,经过对迭代过程的 观察,发现当变化量为 4 时,线特征出现了匹配错误,发 生了严重的局部收敛现象,这证明基于线特征的标定方 法对外参初值的要求较高。而所提方法对初值变化并不 敏感,在变化量达到最大时,各轴上的旋转误差仍被控制 在 1°以下,平移误差被控制在 1.0 cm 以下。这证明所提 方法能够在确保精确性的前提下(平均残差 2 pixels),降 低对初值的依赖程度。

两种方法的平均旋转误差与平移误差如表2所示。



	旋转/(°)			平移/cm		
	x	у	z	x	у	z
基于线特征	3.18	3.41	3.98	4. 91	3.33	6.75
本文方法	0.53	0.30	0.48	0.45	0.34	0. 29

利用初值变化最大时(变化量为8)所求外参将点 云,重投影至相机图像,通过观察投影点云与相机对齐程 度定性判断此次标定效果,为了验证算法在复杂环境下 的稳定性,选取了不同的室内环境对点云进行重投影,并 在场景中添加了额外的干扰物,保证验证场景中的物体 多样性。

室内各场景下的点云投影图如图 11 所示,其点云是 以强度上色的,因此面对在不同场景下由于光源的改变, 色彩发生了变化,其中,图 11(a)中多以规则的物体作为 干扰物与噪声,图 11(b)中多以不规则物作为干扰与噪 声。但可以看出经过投影之后的点云与图像实现了精准 的对齐,两种干扰下,角点处几乎没有误差出现,在 图 11(a)中,墙面与玻璃处,规则物体的边缘处,都取得 了较好的对齐效果,在图 11(b)中,不规则物体处的点云 也能很好的与图像边缘对应。说明本方法在初值变化较 大时仍能实现精确的外参标定,同时面对复杂环境带来 的干扰,具有不错的稳定性。



(a) 规则物体干扰下的重投影效果(a) Reprojection effect under the interference of regular objects



(b) 不规则物体干扰下的重投影效果(b) Reprojection effect under interference from irregular objects

图 11 室内环境下重投影



5.2 室外标定试验

同样于室外开展了标定实验,具体的试验设置将同 室内环境保持一致,同样以折线图的方式给出各方法标 定的残差结果,如图 12 所示。

可以看出,在室外环境下,所提方法仍具有较好的标 定效果,每一组的平均残差仍处在2 pixels 左右。

同样以表格的形式给出残差占比,其结果如表 3 所示。可以看出,室外环境下,绝大部分的重投影残



图 12 室外环境下残差结果对比

Fig. 12 Comparison of residual results in outdoor environment

差<5 pixels(99.59%),这证明所提方法在室外环境下仍能够正常工作。

表 3 室外不同方法所占残差比例

Table 3 Proportion of residuals for different

outdoor methods

士计	均值	残差占比/%				
刀伝	∕pixel	r < 0.5	<i>r</i> < 1	r < 5	r < 10	
基于 MI	9.43	1.92	4.21	40.10	60.45	
基于 ILCC	5.40	5.25	10.13	58.76	90.34	
基于线	2.74	15.07	29.32	82.56	97.89	
本文方法	1. 79	17.16	33.77	99. 59	100	

为验证室外条件下初值变化不同程度的影响,同室 内设置相同的对比试验,各轴上的旋转误差与平移误差 如图 13 所示。



in outdoor environment

由图 13 和表4可以看出,基于线特征方法在室外环境 下出现了很大的波动,稳定性不足,这可能是由于环境的复 杂性造成的,不同的初参对各轴上的变化量影响依旧很 大,初参不当时仍会出现严重的局部收敛现象;相比之下, 本研究所提方法在室外仍取得了较好的标定结果,在初参 发生变化时,能保持最终标定结果的稳定,各轴上的旋转误 差被控制在 0.6°以下,平移误差被控制在 1.0 cm 以下。

表 4 室外环境下外参标定平均误差对比 Table 4 Comparison of the average error of external parameter calibration in outdoor environment

	旋转/(°)			平移/cm		
	x	у	z	x	у	z
基于线特征	3.11	3.00	2.66	5.18	5.00	1.81
本文方法	0.28	0. 22	0.26	0.46	0.53	0.46

同样的,在室外环境下利用初值变换程度最大时所 求外参将点云,重投影至像素坐标系,选取了具有复杂特 征的外界环境,来验证本研究算法具有稳定性,在环境中 包括了车辆、树木、建筑物与灌木等干扰物,其效果如 图 14 所示,图 14(a)展示了对齐的角点与楼梯建筑边 缘,图 14(b)展示了对其的角点与不规则设备边缘。可 以发现,室外环境下点云的投影结果仍能保持很好的重 合度,这从定性的角度证明,所提出的方法在复杂的室外 环境下具有稳定性,可以在室外进行正常工作。



(a) 对齐的建筑边缘与角点 (a) Aligned building edges and corners



(b) 对齐的不规则物与角点
(b) Aligned irregularities with corners
图 14 室外环境下重投影
Fig. 14 Reprojection in an outdoor environment

39

6 结 论

1) 针对目前标定方法存在依赖先验条件、特征约束 单一和标定精度不高等问题,设计了一款新型标定板,提 出了一种融合互信息与多特征约束的两阶段外参自动标 定方法。该方法可由粗到精自动实现外参精准标定。该 方法首先利用互信息关联最大化自动获取外参初值,然 后利用多特征约束优化第一阶段获得的外参,通过最小 化重投影误差精确获得外参的最优值。

2) 为验证所提方法的有效性,分别在室内与室外进 行了标定试验。通过残差对比来验证精确性,通过各轴 上的旋转误差角度与平移误差距离来验证对初值不当的 抵抗性。试验结果表明,所提方法可在没有初值的情况 下,能自动计算出的激光雷达与相机外参,同时具有较高 的精度和稳定性。

3) 为了能够更好的将本方法用于实际生产,在未来 的工作中需要关注:(1)在阴影面积较大时对第一阶段 标定有效性的影响:(2)点云的质量不佳时对特征提取 的影响。

参考文献

[1] 彭梦,邬书跃,陈龙,等. 一种鲁棒的 2D 激光雷达和 摄像机最小解标定方法[J]. 电子测量与仪器学报, 2023,37(8):146-154.

> PENG M, WU SH Y, CHEN L, et al. Robust minimum solution calibration method of 2D LiDAR and camera [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2023,37(8):146-154.

牛晶,申传艳,张利鹏,等. 基于改进 ACO-DWA 算法 [2] 的轮式植保机器人避障路径研究[J]. 电子测量与仪 器学报,2024,38(5):188-200.

> NIU J, SHEN CH Y, ZHANG L P, et al. Research on obstacle avoidance path of wheeled plant protection robot based on improved ACO-DWA algorithm [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2024, 38(5):188-200.

李春磊,陈久朋,伞红军,等.基于多传感器的紧耦合 [3] 三维室内定位与建图[J]. 仪器仪表学报,2024, 45(7):121-131.

> LI CH L, CHEN J P, SAN H J, et al. Tightly coupled 3D indoor SLAM based on multi-sensor [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024, 45(7):121-131.

[4] 邹方星,范百兴,陈哲. 基于运动学标定和空间插值的 机器人定位误差补偿[J]. 电子测量技术, 2024, 47(4):51-57. ZOU F X, FAN B X, CHEN ZH. Robot positioning error

compensation based on kinematic calibration and spatial interpolation [J]. Electronic Measurement Technology, 2024,47(4):51-57.

- [5] 储昭碧,李子朋,高金辉. 一种基于双目相机与单点激 光测距仪的标定方法[J]. 仪器仪表学报, 2023. 44(5):232-239. CHU ZH B, LI Z P, GAO J H, Calibration method based on binocular camera and single point laser rangefinder [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument,
- [6] 吴军,袁少博,祝玉恒,等.采用自适应背景聚类的激 光雷达与相机外参标定优化方法[J]. 仪器仪表学 报,2023,44(2):230-237.

2023,44(5):232-239.

WU J, YUAN SH B, ZHU Y H, et al. Optimization method for external parameters calibration of LiDAR and camera using adaptive background clustering [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2023, 44(2): 230-237.

[7] 郑旺,于红绯,吕晋. 基于线特征的激光雷达与相机外 参标定[J]. 激光与光电子学进展,2024,61(22):204-211.

> ZHENG W, YU H F, LYU J. External parameter calibration of LiDAR and camera based on line feature [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2024, 61 (22): 204-211.

- [8] 刘今越, 唐旭, 贾晓辉, 等. 三维激光雷达-相机间外 参的高效标定方法[J]. 仪器仪表学报, 2019, 40(11): 64-72. LIU J Y, TANG X, JIA X H, et al. High efficient extrinsic parameter calibration method of 3D LiDARcamera system [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2019, 40(11): 64-72.
- [9] ZHANG Z Y. A flexible new technique for camera calibration [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(11), 1330-1334.
- 覃兴胜,李晓欢,唐欣,等.基于标定板关键点的激 [10] 光雷达与相机外参标定方法[J]. 激光与光电子学进 展, 2022, 59(4): 400-407.

QIN X SH, LI X H, TANG X, et al. Extrinsic

calibration method of LiDAR and camera based on key points of calibration board [J]. Laser & Optoelectronics Progress, 2022,59(4):400-407.

- [11] SONG F, YING Y, XU M L, et al. High-precision external parameter calibration method for camera and LiDAR based on a calibration device[J]. IEEE Access, 2023, 11: 18750-18760.
- [12] BELTRÁN J, GUINDEL C, DE LA ESCALERA A. et al. Automatic extrinsic calibration method for LiDAR and camera sensor setups [J]. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, 2022, 23 (10): 17677-17689.
- [13] 王世强,孟召宗,高楠,等.激光雷达与相机融合标定技术研究进展[J]. 红外与激光工程,2023, 52(8):119-132.

WANG SH Q, MENG ZH Z, GAO N, et al. Advancements in fusion calibration technology of LiDAR and camera[J]. Infrared and Laser Engineering, 2023, 52(8): 119-132.

[14] 杨佳佳,张传伟,周李兵,等. 矿用激光雷达与相机的 无目标自动标定方法研究[J]. 工矿自动化,2024, 50(10):53-61,89.

> YANG J J, ZHANG CH W, ZHOU L B, et al. Research on the targetless automatic calibration method for mining LiDAR and camera [J]. Journal of Mine Automation, 2024,50(10):53-61,89.

- [15] BAI Z X, JIANG G, XU AI L. LiDAR-camera calibration using line correspondences [J]. Sensors, 2020, 20(21): 6319-6336.
- [16] YING Y, SONG F, LI L, et al. Automatic targetless monocular camera and LiDAR external parameter calibration method for mobile robots [J]. Remote Sensing, 2023, 15(23): 5560.
- [17] LI ZH B, DONG H Q, LIU D, et al. Extrinsic calibration of a 2D laser rangefinder and a depth-camera using an orthogonal trihedron [C]. 2022 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). IEEE, 2022; 4051-4056.
- [18] HUANG K H, STACHNISS C. Extrinsic multi-sensor calibration for mobile robots using the Gauss-Helmert model[C]. 2017 IEEE/ RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS), 2017: 1490-1496.

- [19] TAYLOR Z, NIETO J. Motion-based calibration of multi modal sensor arrays [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), 2015: 4843-4850.
- [20] LI X CH, XIAO Y X, WANG B B, et al. Automatic targetless LiDAR-camera calibration: A survey [J]. Artificial Intelligence Review, 2023, 56 (9): 9949-9987.
- [21] OU J SH, HUANG P L, ZHOU J, et al. Automatic extrinsic calibration of 3D LiDAR and multi-cameras based on graph optimization[J]. Sensors, 2022, 22(6): 2221.
- [22] LIU R Y, SHI J Y, ZHANG H Y, et al. Causal calibration: Iteratively calibrating LiDAR and camera by considering causality and geometry [J]. Complex & Intelligent Systems, 2023, 9(6): 7349-7363.
- [23] SHI D D, HUANG F Y, YANG J, et al. Improved Shi-Tomasi sub-pixel corner detection based on super-wide field of view infrared images[J]. Applied Optics, 2024, 63(3): 831-837.
- [24] YUAN CH J, LIU X Y, HONG X P, et al. Pixel-level extrinsic self-calibration of high resolution LiDAR and camera in targetless environments [J]. IEEE Robotics and Automation Letters, 2021, 6(4): 7517-7524.
- [25] SUN Y, LI J, WANG Y R, et al. ATOP: An attentionto-optimization approach for automatic LiDAR-camera calibration via cross-modal object matching [J]. IEEE Transactions on Intelligent Vehicles, 2023, 8(1): 696-708.
- [26] 殷宗琨,江明,柏受军,等. 基于 2D 预处理的点云分 割和测量研究[J]. 电子测量与仪器学报,2022, 36(9):53-63.
 YIN Z K, JIANG M, BAI SH J, et al. Research on point cloud segmentation and measurement based on 2D preprocessing [J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2022,36(9):53-63.
- [27] HUANG Y K, DAI Y H, LIU X W, et al. On the acceleration of the Barzilai-Borwein method [J].
 Computational Optimization and Applications, 2022, 81(3): 717-740.
- [28] CHEN SH, SHI B, YUAN Y X. Gradient norm minimization of nesterov acceleration: O (1/k³)[J]. ArXiv preprint arXiv:2209.08862, 2022.

作者简介



刘万里,2003年于河南理工大学获得学 士学位,2006年于河南理工大学获得硕士学 位,2009年于天津大学获得博士学位,现为 中国矿业大学副教授,主要研究方向为多传 感器融合技术。

E-mail:4830@ cumt. edu. cn

Liu Wanli received his B. Sc. degree and M. Sc. degree both from Henan Polytechnic University in 2003 and 2006, and received his Ph. D. degree from Tianjin University in 2009. Currently, he serves as an associate professor at China University of Mining and Technology, focusing on multi-sensor fusion technology.



刘扬(通信作者),2021年于鲁东大学 获得学士学位,现为中国矿业大学硕士研究 生,主要研究方向为传感器的标定技术。 E-mail:ts22050151p31@ cumt. edu. cn

Liu Yang (Corresponding author) received

his B. Sc. degree from Ludong University in 2021. He is currently pursuing his master degree at China University of Mining and Technology. The primary research focus is on sensor calibration technology.



张学亮,2007年于山东科技大学获得学 士学位,2010年于煤炭科学研究总院获得硕 士学位,现为煤炭工业规划设计研究院有限 公司数字与经济分院数字经济所所长,主要 研究方向为智能采矿与数字经济。

E-mail:zhang123xp@ aliyun.com

Zhang Xueliang received his B. Sc. degree from Shandong University of Science and Technology in 2007 and his M. Sc. degree from China Coal Research Institute in 2010. He is now the director of the Institute of Digital Economy, Digital and Economic Branch of CCTEG Coal Industry Planning and Design Research Institute Co., Ltd. His main research directions are intelligent mining and digital economy.