

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J2108471

转台定位误差谐波函数计算方法研究*

舒 溢¹, 朱维斌¹, 黄 焱², 薛 梓²

(1. 中国计量大学计量测试工程学院 杭州 310018; 2. 中国计量科学研究院 北京 100029)

摘要: 为了保障转台定位误差谐波补偿准确性, 针对一种谐波误差函数计算方法开展研究。首先分析了转台定位误差谐波补偿方法, 阐述了基于坐标旋转数字计算方法(CORDIC)的谐波误差函数计算原理可行性; 针对算法原理误差进行分析, 分别建立了与迭代次数 n 、数据位宽 b 的量化模型, 明确了算法在谐波补偿值计算过程的总量化误差; 根据计算精度要求对 n 和 b 取值进行设计, 在现场可编程门阵列(FPGA)中实现谐波误差函数计算并进行实时误差补偿。以谐波误差函数理论值为参考, 仿真证明了计算方法的有效性; 以自制电路板为实验平台, 证明了计算方法的总量化误差模型正确性; 搭建转台测试平台验证定位误差补偿效果, 实验结果证明采用本文提出的谐波误差函数计算方法进行补偿, 使转台定位精度由 $29.0''$ 提高至 $5.3''$ 。

关键词: 谐波误差; 定位误差; CORDIC; 误差建模; 误差补偿

中图分类号: TH7 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 460.40

A calculation method for positioning error of turntable based on harmonic function

Shu Yi¹, Zhu Weibin¹, Huang Yao², Xue Zi²

(1. School of Metrology and Measurement Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China;
2. National Institute of Metrology, Beijing 100029, China)

Abstract: To ensure the accuracy of harmonic compensation value for the turntable positioning error, a calculating method for the harmonic error function is proposed. The harmonic compensation method for turntable positioning is described and the feasibility of the CORDIC algorithm for harmonic error function calculation is introduced in detail. Based on the principle of the CORDIC, the quantitative models of the iteration number n and the data width b are established, respectively. The overall quantization error of calculating harmonic function is deduced. The calculating method is implemented by using the laboratory-made field-programmable gate array circuit. The value of n and b are determined to satisfy the calculation accuracy. Finally, a series of evaluation tests are performed to demonstrate the effectiveness of the method by comparing theoretical and computational values. The data of experiment performed on the test turntable platform confirm that the proposed method can calculate the value of harmonic function effectively. The positioning accuracy of turntable is improved from $29.0''$ to $5.3''$ with this method.

Keywords: harmonic error; positioning error; CORDIC; error modeling; error compensation

0 引言

转台是进行圆周连续角度测量的常用设备, 广泛应用于精密工程、航天航空以及航海等领域, 同时在计量标准装置领域有着重要地位^[1-2]。由于转台存在构件尺寸误差、圆光栅安装偏心偏斜误差、倾角回转误差等因素,

转台定位精度不可避免的受到相应影响^[3]。随着科学技术的不断发展, 对转台定位精度的要求也越来越高。在不改变转台结构的前提下, 转台要获得更高的定位精度, 需要对转台定位误差进行补偿。

针对提高转台定位精度这一问题, 很多研究单位基于改善多读数头结构的硬件补偿方法达到提高定位精度目的。德国联邦物理技术研究院采用分组不等间距排布

收稿日期: 2021-08-25 Received Date: 2021-08-25

* 基金项目: 国家自然科学基金(52175526)、国家重点研发计划(2017YFF0204901)、国家质量监督检验检疫总局科技计划(2016QK189)项目资助

读数头方式研制出一种高精度角度标准比较器,通过 17 个读数头对插值误差、光栅误差进行检测与自校准,定位精度高达 $0.036''^{[4]}$;韩国计量院研制出一种基于等分平均的角度标准比较器,通过 12 读数头 6~7 组合排布,以 $0.64''$ 步距对比较器进行 3 次重复性实验,结果表明定位精度可达 $0.05''^{[5]}$;日本国家计量院通过 12 读数头 3-4-7 不等间距排布方式实现自校准转台设计,并使用自准直仪进行校对实验,结果表明转台定位精度优于 $0.1''^{[6]}$;中国计量科学研究院开发一种基于 3~4 读数头排布方式的自校准角度编码器系统,研究表明系统定位精度在 $\pm 1.5''$ 内,重复性优于 $1.1''^{[7]}$;中国科学院的黄龙等人分析了多读数头测角消差原理,确定采用相位相差 90° 的 4 读数头测角方式,实现了亚角秒级测角目的^[8]。

以上研究是通过硬件补偿方式提高转台定位精度,消除定位误差效果显著,但是存在结构复杂、执行效率低等问题,这就逐渐催生了软件补偿方法的盛行^[9]。软件补偿法通过标定获取转台整圆周多个定位误差数据,拟合获得误差补偿函数模型,运用软件完成转台定位误差补偿^[10]。印度天体物理科学部门 Kaul 等^[11]为提高角度编码器精度,基于谐波分析选用误差前 10 阶傅里叶分量式作为补偿函数模型,在软件中依据模型实现误差补偿,结果表明编码器精度由 $\pm 6''$ 提高至 $\pm 0.6''$;中国计量科学研究院 Huang 等^[12]采用傅里叶分量逆变换法生成连续的补偿值,实现转台全圆周角度位置补偿,定位精度由 $0.15''$ 提高到 $0.05''$;重庆大学王福全等^[13]结合稀疏分解思想与谐波分析建立了转台定位误差补偿模型,搭建实验平台采用提出的模型对定位误差进行修正,实验结果表明该方法能够将转台定位精度提高 2 个数量级;长春光机所苏燕芹等^[14]为了提高精密转台的定位精度,在数据处理中,采用傅里叶谐波分析方法,用不同阶次的简谐波进行拟合,建立误差查询表格用于对后期测量结果的修正,结果证明,转台定位误差修正后的值是修正前的 $1/4$,幅值不超过 $0.8''$;天津大学的郭敬滨等^[15]根据转台定位误差特点和谐波分析结果,并结合最小二乘法、三次样条插值、傅里叶级数拟合 3 种模型特点,通过分析选择傅里叶级数作为定位误差补偿模型,应用该模型对精度为 $17.82''$ 的转台进行补偿,补偿后转台定位误差最大值为 $2.36''$ 。综上研究成果,由于转台定位误差具有周期性特征,使用谐波分析方法处理误差数据拟合获得转台谐波误差函数模型,并在软件中依据模型实现定位误差反向补偿得到广泛应用^[16-17]。但是在基于谐波误差函数进行转台定位误差补偿过程中,谐波误差函数的计算精度将直接影响最终误差补偿效果,故针对谐波误差函数计算精度需要具体开展研究。

针对谐波误差函数计算方法开展研究,阐述在转台定位误差谐波补偿过程中坐标旋转数字计算方法

(coordinate rotation digital computer, CORDIC) 计算谐波误差函数原理可行性;根据 CORDIC 算法原理误差,建立谐波误差函数计算过程中与迭代次数 n 、数据位宽 b 量化关系模型;依据精度要求对关键参数 n 和 b 进行确定,并在现场可编程门阵列 (field programmable gate array, FPGA) 电路中实现谐波函数实时误差补偿。开展验证实验以证明研究计算方法的有效性;以自制电路板为实验平台证明了量化模型的正确性;搭建转台测试系统,实验证明采用 CORDIC 计算谐波误差函数并实现误差补偿,能够有效提高转台定位精度。

1 转台谐波误差函数计算原理

1.1 转台定位误差谐波补偿原理

转台在进行角度测量过程中,各项误差综合作用会体现为转台位置的指向不准确,转台理想转动位置与实际转动位置存在的角度差值,定义为转台定位误差。谐波补偿方法是提高转台定位精度的重要手段,通过标定获得转台整圆周多个等间隔、离散的、具有周期性特征的定位误差数据,使用谐波分析法拟合离散数据,获取转台谐波误差函数;通过对谐波误差函数计算能够得到转台任意位置定位误差谐波补偿值,最后依据计算获取的谐波补偿值完成转台圆周连续角度位置的补偿。

通过谐波分析处理转台定位误差数据,得到各阶次谐波分量的幅值和相位关键参数,拟合的谐波误差函数由各阶次谐波分量的代数和组成,如式(1)所示:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^m c_k \sin(k\theta + \varphi_k) \quad (1)$$

式中: θ 代表转台理想转动位置; m 为谐波误差函数阶次; c_k 、 φ_k 分别表示各阶次谐波的幅值和相位,定义 $w_k(\theta) = k\theta + \varphi_k$, 则式(1)可表示为:

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^m c_k \sin[w_k(\theta)] \quad (2)$$

1.2 谐波误差函数 CORDIC 计算原理

如式(2)所示,转台谐波误差函数 $f(\theta)$ 由 m 个正弦函数相加构成,因此对于谐波误差函数的计算可以分解为对正弦函数的计算与代数求和两部分。鉴于代数求和为常规计算,本文重点讨论正弦函数计算方法。

CORDIC 算法通过矢量旋转逼近原理实现正弦函数计算,假设在坐标系中需要求取图 1 中向量 $\mathbf{v}(x, y)$ 正弦值,求解过程即初始向量 $\mathbf{v}_0$ 在坐标系中旋转逼近向量 $\mathbf{v}$ 位置。

在图 1 中,初始向量 $\mathbf{v}_0$ 经过 n 次旋转后,最终旋转向量 $\mathbf{v}_n$ 与目标向量 $\mathbf{v}$ 近似重合,且旋转向量 $\mathbf{v}_n$ 经过标准化后所得向量 $\mathbf{v}'_n$ 在 y 轴投影 y'_n 即为待求目标向量 $\mathbf{v}$ 正弦值。在初始向量旋转逼近目标向量过程中,单步旋转的笛卡尔坐标可以表示为式(3)。

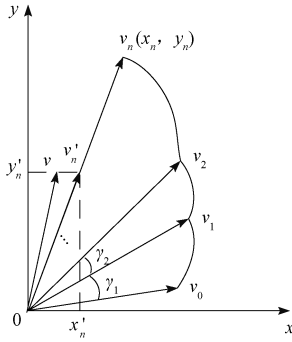


图 1 CORDIC 计算正弦函数原理

Fig. 1 The calculating principle of sinusoidal function with CORDIC

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma_{i-1} & -\sin \gamma_{i-1} \\ \sin \gamma_{i-1} & \cos \gamma_{i-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

对式(3)进行转换得:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = \cos \gamma_{i-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\tan \gamma_{i-1} \\ \tan \gamma_{i-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

在计算过程中,每次旋转的角度表示为:

$$\gamma_i = \arctan[2^{-(i-1)}] \quad (5)$$

在旋转过程中,所有迭代角度累加值等于最终需要旋转的角度 $w_k(\theta)$, 即:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i \gamma_i = w_k(\theta) \quad (6)$$

式中: d_i 为旋转方向判别因子,当旋转向量进行顺时针旋转时 $d_i = -1$,逆时针旋转时 $d_i = +1$ 。将每次迭代过程中产生的模长变换系数 $\cos \gamma_i$ 记作 K_i ,故第 i 次旋转过程可表示为:

$$\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} = K_i \cdot \begin{bmatrix} 1 & -d_i \cdot 2^{-(i-1)} \\ d_i \cdot 2^{-(i-1)} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i-1} \\ y_{i-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

当迭代次数固定时, K_i 为常数,实现过程中可将最终计算结果乘上该常数,引入变量 z_i 表示每次旋转预定角度累加值,故使用 CORDIC 计算正弦函数的迭代方程公式为:

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} - d_i \cdot 2^{i-1} \cdot y_{i-1} \\ y_i = y_{i-1} + d_i \cdot 2^{i-1} \cdot x_{i-1} \\ z_i = z_{i-1} - d_i \cdot \arctan[2^{-(i-1)}] \end{cases} \quad (8)$$

依据 CORDIC 算法计算正弦函数原理,对转台谐波误差函数中 m 个正弦函数分别进行计算,将 m 个正弦函数计算结果代数求和即可得到转台定位误差谐波补偿值。

2 谐波误差函数计算误差量化分析

依据 CORDIC 算法原理计算谐波误差函数过程中,旋转向量在逼近目标向量时因有限迭代次数 n 和数据位

宽 b 限制,导致旋转向量与目标向量未完全重合,引入角度计算误差,影响正弦函数计算精度,导致谐波误差函数计算精度损失。对转台定位误差进行谐波补偿过程中,谐波误差函数计算精度将直接影响定位误差补偿效果,故针对 CORDIC 算法进行谐波误差函数计算的精度需进行具体分析。

2.1 CORDIC 计算总量化误差

在使用 CORDIC 计算角度过程中,定义有限迭代次数 n 引入的误差为近似误差,定义迭代过程中数据位宽 b 引入的误差为舍入误差,将二者误差之和定义为 CORDIC 计算角度总量化误差^[18-19]。

旋转向量每进行一次迭代操作,旋转角度会逐渐收敛,旋转向量更接近目标向量,经过 n 次迭代后,近似误差 δ 不大于最后一次迭代角度,最大近似误差 $\delta_{\max}$ 可表示为:

$$\delta_{\max} = \arctan[2^{-(n-1)}] \quad (9)$$

由数据位宽 b 限制引入的最大舍入误差 $\varepsilon_{\max}$ 为:

$$\varepsilon_{\max} = 2^{-b-0.5} \cdot G(n) \quad (10)$$

式中: $G(n)$ 是与迭代次数 n 相关表达式,且:

$$G(n) = 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \prod_{i=j}^{n-1} \sqrt{1 + 2^{-2i}} \quad (11)$$

由式(9)和(10)可知,当迭代次数为 n ,迭代过程中数据位宽为 b 时使用 CORDIC 计算角度的总量化误差 α_m 为:

$$\alpha_m = \delta_{\max} + \varepsilon_{\max} = \arctan[2^{-(n-1)}] + 2^{-b-0.5} \cdot G(n) \quad (12)$$

2.2 正弦函数 CORDIC 计算量化误差

在使用 CORDIC 计算正弦函数过程中,由于旋转向量与目标向量未完全重合,引入角度计算误差,影响正弦函数计算精度。在具体量化 CORDIC 计算角度总量化误差后,建立如图 2 所示基于 CORDIC 进行正弦函数计算误差模型。

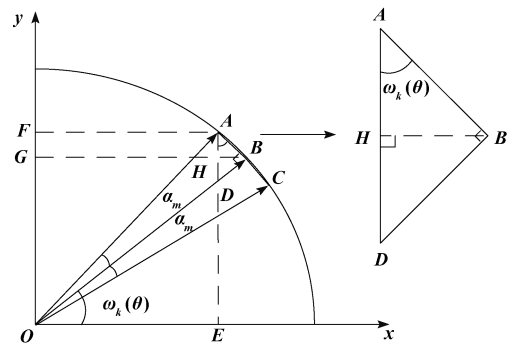


图 2 CORDIC 计算正弦函数误差模型

Fig. 2 Model of the calculation error of sine function with CORDIC

在图2中,目标向量为 $\mathbf{OB}$,即旋转角度为 $w_k(\theta)$,初始向量在旋转逼近目标向量过程中,当进行最后一次角度旋转后,由于近似误差和舍入误差的存在,标准化后旋转向量仍然与目标向量存在夹角,即为总量化误差 α_m ,且分布在目标向量两侧,如向量 $\mathbf{OA}$ 、 $\mathbf{OC}$ 所示。为具体量化CORDIC计算正弦函数误差,只需求出弧长 AB 或弧长 BC 到 y 轴投影长度,本文以弧长 AB 到 y 轴投影长度 FG 为例进行说明。

因为角度总量化误差 α_m 值很小,所以圆弧 AC 可近似为一条线段,又 B 为 AC 中点,故 $\mathbf{OB} \perp \mathbf{AC}$ 。假设CORDIC旋转过程在单位圆上进行,由弧长公式可得弧 AB 的长度 l 为:

$$l = \frac{\alpha_m \cdot \pi}{180} \quad (13)$$

过点 A 做平行于 y 轴线段 AE ,并相交线段 BG 于点 H ,此时线段 AH 长度即为所求线段 FG 长度。根据三角形内角和定理,则 $\angle BAH = \angle EOD = w_k(\theta)$,则:

$$FG = AH = \frac{\alpha_m \cdot \pi \cdot \cos[\omega_k(\theta)]}{180} \quad (14)$$

当 $w_k(\theta)$ 为 0° 时,使用CORDIC进行正弦函数计算的误差取最大值 $L_{\max}$,且:

$$L_{\max} = \frac{\alpha_m \cdot \pi}{180} = \frac{[\arctan 2^{-(n-1)} + 2^{-b-0.5} \cdot G(n)] \cdot \pi}{180} \quad (15)$$

2.3 谐波误差函数计算量化误差

由式(2)可知,谐波误差函数由 m 个正弦函数相加构成,又由式(15)可知,当迭代次数为 n ,迭代过程中数据位宽为 b 时使用CORDIC计算正弦函数最大误差值为 $L_{\max}$ 。结合式(2)和(15)可得,基于CORDIC进行转台谐波误差函数计算的最大量化误差为 $P_{\max}$:

$$P_{\max} = L_{\max} \cdot \sum_{k=1}^m |c_k| = \frac{[\arctan 2^{-(n-1)} + 2^{-b-0.5} \cdot G(n)] \cdot \pi}{180} \cdot \sum_{k=1}^m |c_k| \quad (16)$$

由式(16)可知,在使用CORDIC计算转台谐波误差函数过程中,谐波误差函数的计算精度取决于迭代次数 n 和迭代过程中数据位宽 b 。对于给定的 n 值和 b 值,依据式(16)可具体量化出基于CORDIC进行转台谐波误差函数计算精度损失。

3 谐波误差函数实时补偿电路设计

由于FPGA具有运行速度快、可多线程工作等优点,为保证转台定位误差补偿过程中谐波误差函数计算补偿的实时性和快速性,基于FPGA平台设计谐波误差函数计算和实时补偿电路,电路原理如图3所示。

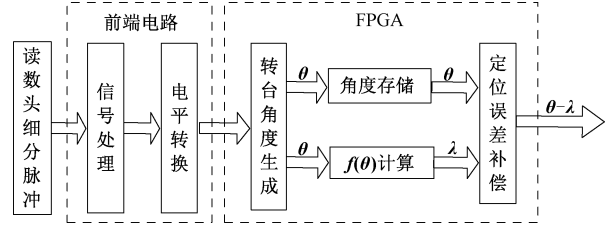


图3 转台定位误差谐波补偿电路原理

Fig. 3 Schematic of compensation circuit for positioning error

由图3可见,转台定位误差谐波补偿电路主要由信号处理、电平转换、转台角度生成、角度存储、谐波误差函数 $f(\theta)$ 计算和定位误差补偿6个模块组成。前端电路中信号处理模块接收读数头细分脉冲信号,经电平转换模块后输出满足FPGA引脚电平标准的两路正交方波;FPGA接收两路正交方波生成转台当前角度值 θ ,分别进行角度存储和谐波误差函数 $f(\theta)$ 计算;将转台当前角度值 θ 与谐波误差函数 $f(\theta)$ 计算结果 λ 进行差值运算,得到补偿角度值 $\theta-\lambda$,完成转台定位误差谐波补偿功能。

3.1 参数 n 和 b 选择

转台定位谐波误差函数实时补偿电路需要关注谐波误差函数计算精度与硬件资源之间平衡。本文研究对象转台采用圆周16384刻线光栅盘,分度角为 $79.1''$,配套使用1024细分信号处理器,输出脉冲角度分辨率为 $0.077''$ 。谐波误差函数的计算精度损失按照不大于转台测角最小分辨率的10%进行设计,同时谐波误差函数由 m 个正弦函数相加构成,假设谐波误差函数中各阶次谐波幅值累加和 $\sum_{k=1}^m |c_k| \leq 200''$,由式(16)可知,则单个正弦函数的最大允许计算误差为 L_{err} :

$$L_{err} = \frac{0.077'' \times 10\%}{\sum_{k=1}^m |c_k|} = \frac{0.0077''}{200''} = 3.85 \times 10^{-5} \quad (17)$$

在FPGA电路中使用CORDIC计算谐波误差函数,为保证谐波误差函数计算精度,通过确定最小迭代次数 n ,并选择合适的数据位宽 b ,使CORDIC计算单个正弦函数误差小于 L_{err} 。

在使用CORDIC计算正弦函数过程中,参数 n 和 b 的选择分为两个过程:1)根据CORDIC算法旋转过程中近似误差导致的理论精度损失和电路设计要求确定 n 值;2)在特定迭代次数 n 下,利用式(15)得到使用不同数据位宽 b 的最大计算误差,将最大计算误差与 L_{err} 进行比较,确定满足精度要求的最小数据位宽 b 。

由CORDIC算法有限迭代次数 n 导致的正弦函数计算精度损失满足式(18)。

$$\frac{[\arctan 2^{-(n-1)}] \cdot \pi}{180} \leq L_{err} \quad (18)$$

由式(17)和(18)可得, $n=16$ 为最佳迭代次数,通过 MATLAB 程序得到的仿真结果如图 4 所示。

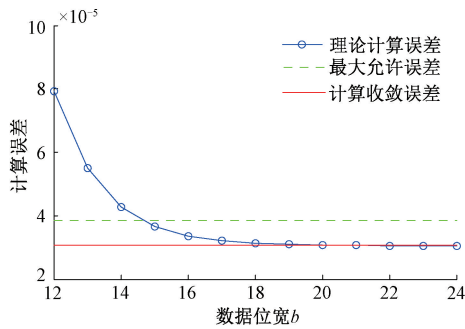


图 4 数据位宽 b 与 CORDIC 计算正弦函数误差关系

Fig. 4 Relationship between b and calculation error of CORDIC

由图 4 可见,当迭代次数 $n=16$ 时,通过选择数据位宽 $b=15$ 可满足 CORDIC 计算正弦函数精度要求,但是当数据位宽 $b \geq 18$ 时,CORDIC 计算正弦函数误差收敛为恒定值。综上所述,为充分保证 CORDIC 计算正弦函数精度,当迭代次数 $n=16$ 时,选择数据位宽 $b=18$ 。

3.2 CORDIC 函数计算的 FPGA 电路设计

谐波误差函数 $f(\theta)$ 由 m 个正弦函数相加构成,在 FPGA 中计算 $f(\theta)$ 时将采用如图 5 所示并行计算结构。

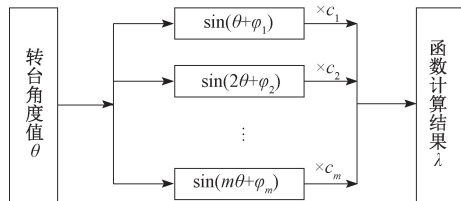


图 5 谐波误差函数 $f(\theta)$ 计算结构

Fig. 5 Calculation structure of the harmonic function $f(\theta)$

图 5 可见,FPGA 中获得转台角度值 θ 后,基于 CORDIC 算法对谐波误差函数 $f(\theta)$ 中 m 个正弦函数并行计算,最后将 m 个正弦函数计算结果相加得到 $f(\theta)$ 计算结果 λ 。在 FPGA 中实现 CORDIC 计算正弦函数采用流水线结构,每一级 CORDIC 迭代运算使用单独运算单元,CORDIC 计算正弦函数流水线结构如图 6 所示。

图 6 可见,采用流水线结构形式的 CORDIC 设计将一个算术操作分解成小规模加減法和移位操作,并在多个高速时钟内完成。使用 Quartus 软件评估了 CORDIC 流水线结构的性能,具体参数见表 1 所示。

由表 1 可见,使用 CORDIC 流水线结构计算正弦函数计算精度满足要求,同时占用 FPGA 芯片资源较少,设计电路满足系统需求。

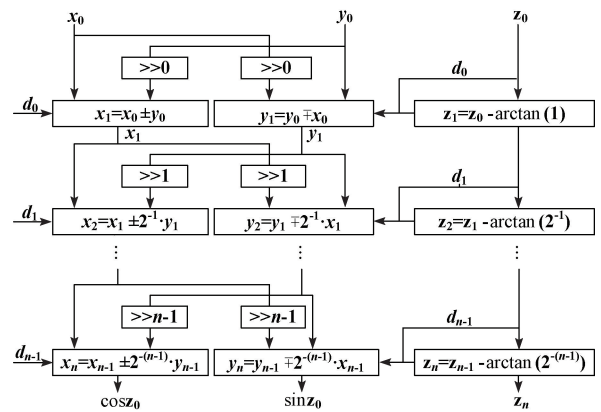


图 6 CORDIC 计算正弦函数流水线结构

Fig. 6 Pipelined architecture of the CORDIC for calculating sinusoidal function

表 1 FPGA 中实现 CORDIC 算法参数特征

Table 1 Parameters of CORDIC implemented in FPGA

参数	CORDIC 算法
迭代次数 n	16
数据位宽 b	18
精度	3.13×10^{-5}
LE 资源	2 769 (2%)
时钟延时	15

4 实验与数据分析

为了证明转台定位误差谐波补偿方法的有效性,开展计算方法的可行性实验;分析不同迭代次数 n 和数据位宽 b 对谐波误差函数最大计算误差影响,验证 $P_{\max}$ 对谐波误差函数计算精度表征的有效性;并将方法应用于实际转台定位系统,证明谐波误差补偿方法对定位精度的提升作用。

4.1 谐波误差函数计算方法可行性

为获得转台谐波误差函数,将多面棱体与气浮转台同轴安装,调节自准直仪和多面棱体水平,以多面棱体一个面为基准,利用自准直仪对基准面进行定位。实验在中国计量科学研究院开展,标定系统实物装置如图 7 所示,主要仪器如表 2 所示。

设置转台转速为 $30^\circ/\text{s}$,步距为 10° ,共获得 36 个采样点,使用谐波分析法处理转台定位标定数据,结果表明前四阶谐波分量幅值较大,故选用前四阶谐波分量代数和作为本次实验中转台谐波误差函数,标定数据的谐波误差函数如式(19)所示。

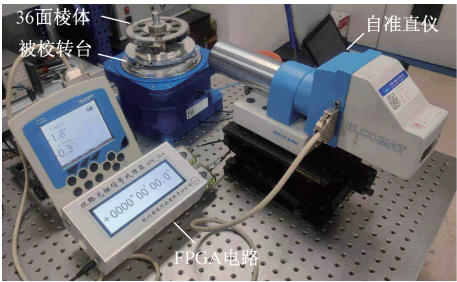


图 7 实验装置图

Fig. 7 Photograph of experimental setup

表 2 主要仪器规格

Table 2 Specifications of main instruments

仪器名称	型号(制造商)	技术参数
多面棱体	36 面	等级:二等
自准直仪	ELCOMAT 3 000 (MWO)	测量范围: -1 000"~+1 000" $U_1=0.25''$
光栅码盘	R10851 (MicroE)	16 384 刻线 栅距: 20 μm
读数头	Mercury 3 000 (MicroE)	细分倍率:1 024

$$f(\theta) = -11.1 \cdot \sin(\theta - 53.47) - 13.1 \cdot \sin(2\theta + 9.68) + 8.3 \cdot \sin(3\theta - 35.79) - 5.7 \cdot \sin(4\theta + 5.59) \quad (19)$$

设置 CORDIC 算法迭代次数 $n=16$, 数据位宽 $b=18$, 由式(16)可得谐波误差函数式(19)在此实验工况下最大计算量化误差为 $1.19 \times 10^{-3}''$ 。

在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 范围内等间距产生 10 000 个角度值作为谐波误差函数的输入, 在 Quartus 软件中计算式(19)得到 10 000 个补偿角度仿真值, 与在 MATLAB 中计算式(19)得到 10 000 个补偿角度理论值, 将 10 000 个二者差值作为在 Quartus 中函数计算误差值, 仿真结果如图 8 所示。

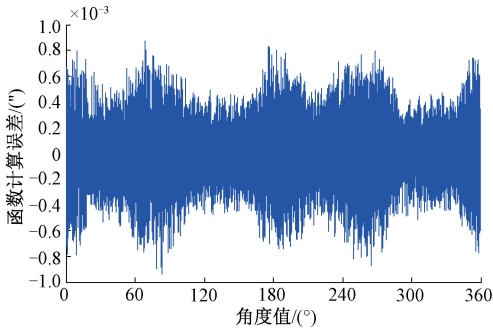


图 8 4 阶谐波函数计算误差仿真

Fig. 8 The calculation error of the 4 order harmonic function

由图 8 可见, 通过仿真测试的 CORDIC 计算谐波误差函数最大计算误差为 $9.36 \times 10^{-4}''$, 与 $1.19 \times 10^{-3}''$ 的理论分析结果吻合, 说明了本文谐波误差函数计算方法的正确性和可行性。

4.2 谐波误差函数计算误差表征有效性

根据式(16), 谐波误差函数计算量化误差 $P_{\max}$ 由 CORDIC 计算谐波误差函数过程中迭代次数 n 和数据位宽 b 决定。为验证 $P_{\max}$ 对谐波误差函数计算误差表征有效性, 针对式(19), 分别设置 $n=15 \sim 17$ 、 $b=12 \sim 24$, 在 MATLAB 环境下进行仿真分析, 结果如图 9 所示。

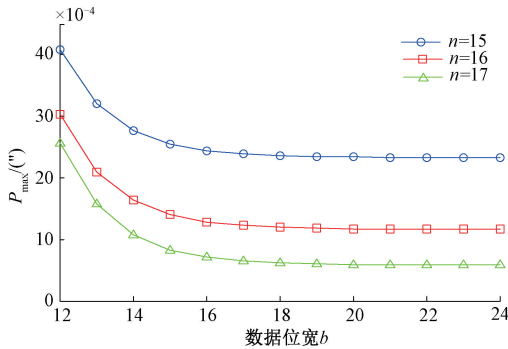


图 9 $P_{\max}$ 与 n, b 关系

Fig. 9 Relationship between $P_{\max}$ and n, b

由图 9 可知: 1) 当迭代过程中数据位宽 b 一定时, $P_{\max}$ 随迭代次数 n 增大而减小, 实验结果与式(16)结论吻合。2) 当迭代次数 n 一定时, $P_{\max}$ 随数据位宽 b 的增加迅速收敛, 不同 n 值的衰减曲线趋势近似相同, 当 b 增加到一定程度时, n 取值对 $P_{\max}$ 起主导作用, 实验结果与式(16)结论吻合。

为了进一步证明 $P_{\max}$ 对谐波误差函数计算误差表征有效性, 在实际电路中开展验证实验, 将谐波误差函数最大仿真计算误差值与电路实现结果进行比较。电路实验采用自制电路板进行, 如图 10 所示。

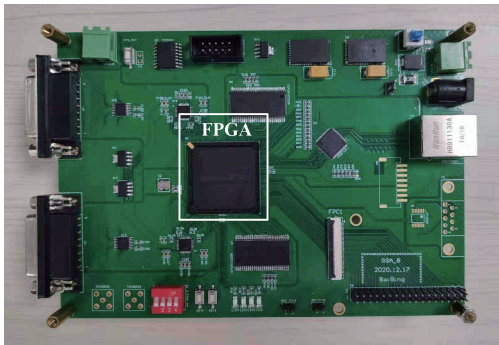


图 10 实验自制电路板

Fig. 10 Photograph of laboratory-made circuit board

在自制电路板中,选用 Altera 公司的 EP4CE115F29C7 款 FPGA 芯片实现谐波误差函数计算。实验选用两台 RIGOL DG4162 信号发生器,产生频率为 10 MHz 的两路差分正交方波。仿真实验和电路实验均选择 $n = 15, 16, 17$ 和 $b = 19, 20, 21, 22$ 工况,仿真计算误差值为 $P_{\max_s}$,电路计算误差值为 $P_{\max_c}$,实验结果如表 3 所示。

表 3 $P_{\max_s}$ 和 $P_{\max_c} (\times 10^{-4})$
Table 3 $P_{\max_s}$ and $P_{\max_c} (\times 10^{-4})$

b	$n = 15$		$n = 16$		$n = 17$	
	$P_{\max_s}$	$P_{\max_c}$	$P_{\max_s}$	$P_{\max_c}$	$P_{\max_s}$	$P_{\max_c}$
$b = 19$	23.440 4	20.022 1	11.797 6	9.637 7	5.980 7	4.734 6
$b = 20$	23.372 0	20.014 5	11.724 7	9.532 9	5.903 3	4.726 1
$b = 21$	23.337 8	19.855 0	11.688 3	9.255 2	5.864 6	4.597 2
$b = 22$	23.320 7	19.782 3	11.670 0	9.146 2	5.847 3	4.510 8

由表 3 可知:1) 当 b 值恒定时,随着 n 取值由小变大, $P_{\max_c}$ 和 $P_{\max_s}$ 的值逐渐减小;2) 当 n 值恒定时, $P_{\max_c}$ 和 $P_{\max_s}$ 随着 b 值增大而减小,当 b 值增大到一定程度时, n 的取值对 $P_{\max_c}$ 和 $P_{\max_s}$ 起决定性作用,变化趋势与图 9 中曲线一致。3) 由于式 (16) 是谐波误差函数最大计算误差模型, $P_{\max_s}$ 是各种误差同时达到最大时的值,因此当 n 和 b 取不同值时,总是存在 $P_{\max_s} > P_{\max_c}$ 。

综上所述,在各种 n, b 取值情况下,无论是仿真测试还是电路测试,算法误差结果均与理论值吻合,证明了 $P_{\max}$ 对谐波误差函数计算误差表征有效性;同时由于仿真测试值与电路测试值高度一致,也证明了本文算法的电路可实现性。

4.3 转台定位误差补偿实验

为验证本文提出的谐波误差函数计算方法在实际转台定位误差补偿系统中应用的有效性,开展补偿效果验证实验。仍采用图 6、表 2 所示实验装置,以图 10 所示电路板为误差实时补偿算法承载平台开展实验。仍设置转台转速为 $30^\circ/\text{s}$,步距为 10° ,共 36 个测试点,实验结果如图 11 所示。

由图 11 可得,补偿前标定转台定位误差有误差累计情况,误差波动范围为 $-29.0'' \sim 21.8''$;补偿后标定转台定位误差波动范围为 $-5.3'' \sim 1.1''$,有效提升了转台定位精度。

对补偿前后转台定位误差数据进行傅里叶变换,得到误差曲线的频谱如图 12 所示。

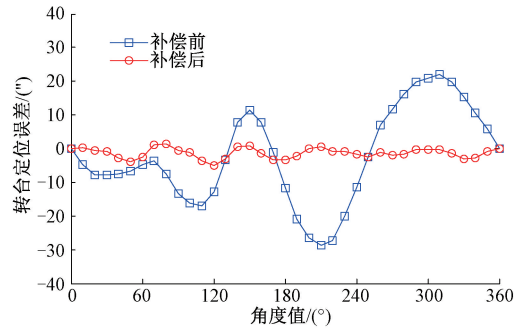


图 11 补偿前后转台定位误差对比

Fig. 11 The positioning error of turntable before and after compensation

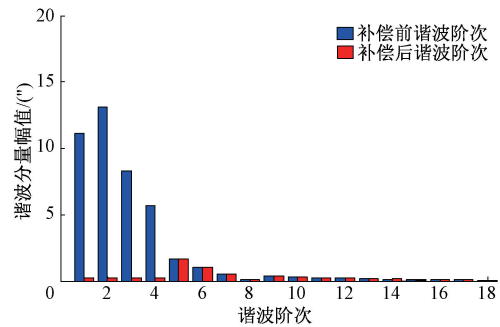


图 12 补偿前后转台定位误差谐波阶次

Fig. 12 Error order distributions of positioning error before and after compensation

图 12 可见,由于本次实验使用转台定位误差前四阶谐波分量代数和作为转台谐波误差函数,补偿后转台定位误差前四阶谐波分量被有效抑制,残留转台定位误差主要由大于四阶谐波误差分量引入,证明补偿算法的有效性。

补偿后误差频谱的前四阶谐波分量存在小范围残留,且幅值强度近似相等,分析是由于转台定位重复性所致。

5 结 论

本文针对转台定位误差补偿过程中谐波误差函数计算方法开展研究。首先介绍了转台定位误差谐波补偿方法并阐述了 CORDIC 计算谐波误差函数的原理可行性;然后针对 CORDIC 算法原理误差进行分析,建立了谐波误差函数计算过程中误差与迭代次数 n 、数据位宽 b 相关的量化误差模型;根据精度要求对计算过程中关键参数 n 和 b 进行选择,在 FPGA 电路中实现谐波误差函数计算并实现误差实时补偿。实验证明了计算方法的可行性,验证了计算方法总量化误差模型的正确性,将研究方法应用于实际转台定位系统,实验结果显示转台定位精度由 $29.0''$ 提高至 $5.3''$,说明研究成果具有良好的实际应用价值。

参考文献

- [1] YANG Q X, WU Z L, HUANG M, et al. An improved angle calibration method of a high-precision angle comparator [J]. Metrology and Measurement Systems, 2021, 28(1): 181-190.
- [2] MOU J P, SU J J, HUANG T C. Research on data synchronization technology between rotary table and fiber optic gyroscope [J]. Measurement, 2021, 173 (5): 108579.
- [3] CHEN L, ZHOU Y L, ZHANG D W, et al. A dynamic angle metrology system based on fibre-optic gyroscope and rotary table [J]. Metrology and Measurement Systems, 2019, 26(3): 497-504.
- [4] PROBST R, WITTEKOPF R, KRAUSE M, et al. The new PTB angle comparator [J]. Measurement Science and Technology, 1998, 9: 1059-1066.
- [5] JONG A K, JAE W K. Precision angle comparator using self-calibration of scale errors based on the equal-division-averaged method [J]. MacroScale, 2011: 1-4.
- [6] WATANALE T, SAMIT W, VATCHARANUKUL K, et al. High resolution self-A rotary table by the interpolation signal calibration [J]. Key Engineering Materials, 2015, 625: 53-59.
- [7] HUANG Y, XUE Z, QIAO D, et al. Study on the metrological performance of self-calibration angle encoder [C]. 8th International Symposium on Advanced Optical Manufacturing and Testing Technologies: Optical Test, Measurement Technology, and Equipment International Society for Optics and Photonics, 2016, 9684: 968400.
- [8] 黄龙,潘年,马文礼,等. 拼接式编码器测角误差分析及试验 [J]. 中国光学, 2015, 8(3): 464-470.
HUANG L, PAN N, MA W L, et al. Error analysis and experimentation of scale tape encoder [J]. Chinese Optics, 2015, 8(3): 464-470.
- [9] 周彬彬. 高精度圆光栅测角系统误差补偿技术研究 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2016.
ZHOU B B. Research on error compensation technology for high accuracy circle gratings angle-measuring system [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2016.
- [10] 朱道萌. 超精密气浮转台误差分析及补偿研究 [D]. 贵州:贵州大学, 2016.
ZHU D M. Research on error analysis and compensation of ultra-precision air floating turntable [D]. Guizhou: Guizhou University, 2016.
- [11] KAUL S K, TICKOO A K, KOUL R, et al. Improving the accuracy of low-cost resolver-based encoders using harmonic analysis [J]. Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, 2007, 586: 345-355.
- [12] HUANG Y, XUE Z, HUANG M, et al. The NIM continuous full circle angle standard [J]. Measurement Science and Technology, 2018, 29(7): 074013.
- [13] 王福全,王珏,谢志江,等. 精密转台角分度误差补偿 [J]. 光学精密工程, 2017, 25(8): 2165-2172.
WANG F Q, WANG J, XIE ZH J, et al. Compensation of angular indexing error for precision turntable [J]. Optics and Precision Engineering, 2017, 25 (8): 2165-2172.
- [14] 苏燕芹,张景旭,陈宝刚,等. 谐波分析方法在提高精密转台回转精度中的应用 [J]. 红外与激光工程, 2014, 43(1): 274-278.
SU Y Q, ZAHNG J X, CHEN B G, et al. Harmonic analysis application in accuracy improvement of precise turntable [J]. Infrared and Laser Engineering, 2014, 43(1): 274-278.
- [15] 郭敬滨,曹红艳,王克新,等. 转台分度误差的检定及补偿模型的建立 [J]. 天津大学学报, 2014, 47(6): 524-529.
GUO J B, CAO H Y, WANG K X, et al. Check of indexing error for turntable and establishment of its compensation model [J]. Journal of Tianjin University, 2014, 47(6): 524-529.
- [16] 赵人杰,马文礼. 利用误差谐波补偿法提高金属圆光栅测角精度 [J]. 仪器仪表用户, 2009, 16(3): 69-71.
ZHAO R J, MA W L. Improving the accuracy of new-type encoders using error harmonic compensation [J]. Instrumentation Customer, 2009, 16(3): 69-71.
- [17] 李尢丽,薛梓,黄垚,等. 全圆连续角度标准装置的系统误差分离与补偿 [J]. 仪器仪表学报, 2021, 42(3): 1-9.
- [18] LI G L, XUE Z, HUANG Y, et al. System error separation and compensation of the continuous full circle angle standard device [J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2021, 42(3): 1-9.
- [19] YU H H. The quantization effects of the CORDIC algorithm [J]. IEEE Transactions on Signal Proc, 1992, 40(4): 834-844.
- [19] ZHU W B, YE S J, HUANG Y, et al. An improved cordic for digital subdivision of Moiré signal [J]. Metrology and Measurement Systems, 2020, 27 (1): 51-64.

作者简介



舒溢,2019 年于江西理工大学获得学士学位,现为中国计量大学硕士研究生,主要研究方向为转台定位误差补偿方法。

E-mail: 1548386825@qq.com

Shu Yi received his B. Sc. degree from Jiangxi University of Science and Technology in 2019. He is currently pursuing his master degree at China Jiliang University. His research interest is the turntable positioning compensation.



朱维斌(通信作者),2014 年获得浙江大学控制理论与控制工程博士学位。现为中国计量大学副教授,主要研究方向为光栅信号处理和角度精密测量。

E-mail: zhuweibin@cjl. edu. cn

Zhu Weibin (Corresponding author) received his Ph. D. degree in Control Theory and Control Engineering from Zhejiang University in 2014. He is currently an associate professor at China Jiliang University. His current interests include the grating signal processing and precision angle measurement.



黄焱,2004 年和 2007 年于北京工业大学分别获得学士学位和硕士学位。2007~2013 年在北京计量学院几何实验室工作,2013 年至今在中国计量科学研究院长度与精密工程计量分部担任高级工程师。目前在浙江大学攻读博士学位,主要研究方向为角度计量。

E-mail: huangyao@nim. ac. cn

Huang Yao received his B. Sc. degree and M. Sc. degree both from Beijing University of Technology in 2004 and 2007, respectively. He worked at the Geometric Lab of Beijing Metrology Institute from 2007 to 2013 and joined the Division of Metrology in Length and Precision Engineering of National Institute of Metrology in 2013. He is currently pursuing his Ph. D. degree at Zhejiang University. His main research interest is angle measurement.



薛梓,2006 年于哈尔滨工业大学获得博士学位。1991 年起开始在中国计量科学研究院工作,目前为亚太计量规划组织长度技术委员会主席、国际计量技术委员会长度咨询委员会委员,主要研究方向为几何量计量。

E-mail: xuez@nim. ac. cn

Xue Zi received her Ph. D. degree from Harbin Technical University in 2006. She joined the Division of Metrology in Length and Precision Engineering of National Institute of Metrology in 1991. She is currently the chairman of the Technical Committee of Length (TCL) of the Asia Pacific Metrology Programme (APMP), the member of Consultative Committee for Length (CCL) of the International Committee for Weights and Measures (CIPM). Her main research interest is geometric measurement.