

DOI: 10.19650/j.cnki.cjsi.J1905169

基于 Vondark-Cepek 滤波的氢铯时间尺度融合方法研究*

姜萌^{1,2,3}, 董绍武^{1,2,4}, 武文俊^{1,2}, 宋会杰^{1,2}, 高喆^{1,2}, 屈俐俐^{1,2}

(1. 中国科学院国家授时中心 西安 710600; 2. 中国科学院时间频率基准重点实验室 西安 710600;
3. 中国科学院大学 北京 100049; 4. 中国科学院大学天文与空间科学学院 北京 100049)

摘要:氢原子钟和铯原子钟是当前国际原子时和各国标准时间产生的主要精密频率源,二者分别拥有优良的短期和长期稳定度特性。充分利用氢钟短稳和铯钟长稳进行时间保持成为时间产生过程中的一项关键技术。以提高时间尺度的长短期稳定性为目标,提出了 Vondark-Cepek 组合滤波的氢铯融合时间产生方法。首先利用 AT1 算法分别对氢钟组和铯钟组各产生一个钟组时间尺度,然后根据最小二乘原则对 Vondark-Cepek 组合滤波关键参数进行选取,进而通过氢钟组时间尺度时间序列的差分信息对铯钟组时间尺度进行性能增强,从而获得氢铯融合时间尺度。计算结果表明:该时间尺度 1 h 稳定度为 3.36×10^{-15} , 15 d 稳定度为 3×10^{-15} , 均优于氢铯单个时间尺度相同平均时间上的性能指标。

关键词:时间尺度;氢原子钟;铯原子钟;Vondark-Cepek 组合滤波

中图分类号: TH761.2 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 510.80

Fusion of hydrogen and cesium time scale based on Vondark-Cepek filter

Jiang Meng^{1,2,3}, Dong Shaowu^{1,2,4}, Wu Wenjun^{1,2}, Song Huijie^{1,2}, Gao Zhe^{1,2}, Qu Lili^{1,2}

(1. National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;

2. Key Laboratory of Time and Frequency Primary Standards, Chinese Academy of Sciences, Xi'an 710600, China;

3. University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

4. School of Astronomy and Space Sciences, University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

Abstract: Hydrogen maser and cesium atomic clock are the mainly precise frequency sources which can produce the international atomic time and national standard time. They have excellent features of short-term and long-term stability. How to make full use of the short-term stability of hydrogen maser and the long-term stability of cesium clock has become a key technology during the process of time generation. To improve the long-term and short-term stability of the time scale, a method for generating the fusion time of hydrogen maser and cesium clock using Vondark-Cepek combined filtering is proposed. Firstly, AT1 method is used to generate a clock ensemble time scale for hydrogen masers and cesium clocks, respectively. Then, the key parameters of Vondark-Cepek combined filter are selected according to the least square principle. In further, the performance of the time scale of cesium clock ensemble is enhanced by the differential information of the time scale of hydrogen maser ensemble. In this way, the fused time scale of hydrogen-cesium is obtained. The calculation results show that the 1-hour stability of the time scale is 3.36×10^{-15} and the 15-day stability is 3×10^{-15} . These results are better than the performance of single time scale of single cesium clock or single hydrogen maser in the same average time.

Keywords: time scale; hydrogen maser; cesium atomic clock; Vondark-Cepek filtering

0 引言

当前的国际标准时间是协调世界时(universal time

coordinated, UTC)。氢原子钟和铯原子钟共同构成了产生 UTC 的钟组,二者分别有着良好的短期和长期稳定度^[1-2]。世界上的重要时间实验室都同时配备了氢原子钟和铯原子钟^[3]。为充分发挥氢和铯不同类型原子钟的

特性,氢铯联合守时技术的应用成为研究热点。近年来,有些研究工作分别以氢钟、铯钟或者铯钟组时间作为参考,对另一类原子钟进行钟差测量形成时间序列后,对守时钟组中的铯钟短期波动进行修正或对氢钟的速率和频率漂移进行扣除,然后通过加权平均来获得最终的时间尺度^[4-6]。也有部分学者利用铯原子钟组时间作为参考,对氢钟进行速率和频率漂移扣除,利用小波算法降低氢原子钟噪声影响后,建立了氢钟组的时间尺度^[7-8]。在上述的研究方法中,氢铯联合时间尺度是基于两类原子钟数据采用类似加权平均方法 AT1 或 ALGOS 算法产生。AT1 时间尺度算法是目前世界上许多守时实验室正在使用的时间尺度算法^[9],而 ALGOS 算法是计算国际标准时间所用的时间尺度算法^[10]。本文从时间尺度层面对氢铯联合守时方法进行了研究,并对氢钟组和铯钟组时间尺度的融合方法进行了探讨,提出了 Vondark-Cepek (V-C) 组合滤波的氢铯融合时间尺度算法。V-C 组合滤波方法是在 1969 年捷克天文学家 Vondark 提出的初始平滑方法基础上发展而来的,它起初应用于融合长稳较好的 VLBI 获得的地球自转定向参数与短稳较好的 GPS 获得的地球自转定向参数,成功地综合了 VLBI 和 GPS 两类数据的优点,获得了令人满意的结果^[11-14]。2009 年,国际权度局 (BIPM) 将该方法引入长稳较好卫星双向时间比对和短稳较好 GPS 冗余链路时间比对的联合计算,有效改善了国际时间比对结果的稳定性和可靠性^[15]。氢铯时间尺度融合也符合应用典型的 V-C 组合滤波理论模型。首先以氢、铯原子钟组各产生单独的时间尺度,然后使用最小二乘原则对绝对平滑、绝对逼真以及一阶导数的绝对拟合这 3 个组合滤波条件进行折中,并通过氢钟组时间尺度时间序列的差分信息对铯钟组时间尺度进行性能增强,从而获得较为理想的氢铯融合的时间尺度。

1 氢铯钟组时间尺度融合算法

1.1 氢钟组和铯钟组时间尺度融合数学模型

利用 AT1 方法先分别产生氢、铯钟组时间尺度^[16-17],然后对两种不同特点的数据序列进行时间尺度层面的融合。首先定义铯钟组时间尺度 (TA_{Cs}) 数据为 $m(t_i)$,是时间 t_i 的函数, $i=1,2,3,\dots$,其在 t_i 时刻的导数定义为 $m'(t) = [m(t_{i+1}) - m(t_i)] / (t_{i+1} - t_i)$ 。 $M(t_j)$ 是氢钟组时间尺度 (TA_H) 的数据,它的导数定义为 $M'(t) = [M(t_{j+1}) - M(t_j)] / (t_{j+1} - t_j)$ 。其中 $j=1,2,3,\dots$ 。 $m'(t)$ 和 $M'(t)$ 的物理意义是一致的,都是时间尺度序列的速率。因此,当 $t_i = t_j$ 时, $m'(t) = M'(t)$ 。则有式(1):

$$\int_{MJD1}^{MJD2} m'(TA_{Cs}) dt = \int_{MJD1}^{MJD2} M'(TA_H) dt \quad (1)$$

式中: MJD 为简化儒略日。则铯钟组时间尺度在 $MJDi+1$ 时刻的估计可表示为式(2):

$$m(MJD2) = m(MJD1) + M'(t_j) \Delta t_j \quad (2)$$

因选取铯、氢钟组时间尺度的时间间隔相同,故有式(2)铯钟组下一时刻的钟差估计,可用本时刻铯钟组钟差与氢钟组时间尺度速率和时间间隔表示。

1.2 V-C 融合滤波方法

假设输入观测序列 1 表示为 y'_j , 对应时标为 x_j , 权重为 p_j ; 观测序列 2 一阶导数表示为 y'_k , 对应时标为 \bar{x}_k , 权重为 \bar{p}_k ; 输出序列则是要得到的平滑曲线表示为 y_i , 对应时标为 x_i 。定义 3 个量:

1) 曲线的平滑度:

$$S = \frac{1}{x_N - x_1} \int_{x_1}^{x_N} \varphi^{m2}(x) dx \quad (3)$$

式中: $\varphi(x)$ 的表达式是未知的,需根据平滑的数据对其三阶导数 $\varphi'''(x)$ 进行估计。在两点 $[x_{i+1}, y_{i+1}]$ 和 $[x_{i+2}, y_{i+2}]$ 之间的平滑曲线被定义为由邻近的 4 个点 $i, i+1, i+2, i+3$ 得到的一个三阶的拉格朗日多项式 $L_i(x)$:

$$L_i(x) = \sum_{k=0}^3 \left(\prod_{\substack{j=0 \\ (j \neq k)}}^3 \frac{(x - x_{i+j})}{(x_{i+k} - x_{i+j})} \right) y_{i+k} \quad (4)$$

其三阶导数为:

$$L_i'''(x) = \sum_{k=0}^3 \left(6 \prod_{\substack{j=0 \\ (j \neq k)}}^3 \frac{1}{(x_{i+k} - x_{i+j})} \right) y_{i+k} \quad (5)$$

每对数据点之间的三阶导数设定为常量,式(3)可以表示为:

$$S = \frac{1}{x_N - x_1} \sum_{i=1}^{N-3} \int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} L_i''(x) dx = \sum_{i=1}^{N-3} (a_i y_i + b_i y_{i+1} + c_i y_{i+2} + d_i y_{i+3})^2 \quad (6)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned} a_i &= \frac{6\sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1}) / (x_N - x_1)}}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})} \\ b_i &= \frac{6\sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1}) / (x_N - x_1)}}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3})} \\ c_i &= \frac{6\sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1}) / (x_N - x_1)}}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3})} \\ d_i &= \frac{6\sqrt{(x_{i+2} - x_{i+1}) / (x_N - x_1)}}{(x_{i+3} - x_i)(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+3} - x_{i+2})} \end{aligned} \right.$$

这个平滑的定义表示理想的平滑函数是一个时间的二次函数(其一阶导数是一个线性函数)。

2) 平滑曲线对观测值的逼真度:

$$F = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i (y'_i - y_i)^2 \quad (7)$$

3) 平滑曲线对观测值一阶导数的逼真度:

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{p}_i (\bar{y}'_i - \bar{y}_i)^2 \quad (8)$$

一阶导数 \bar{y}_i 的平滑值可以根据平滑函数值 y_i 表示。

使用用来定义 S 的拉格朗日多项式 $L_i(x)$ 的一阶导数,表示为 $L'_i(x)$:

$$L'_i(x) = A_i(x)y_i + B_i(x)y_{i+1} + C_i(x)y_{i+2} + D_i(x)y_{i+3} \quad (9)$$

其中

$$A_i(x) = \frac{\sum_{l=0}^2 \sum_{\substack{m=l+1 \\ (m \neq 0)}}^3 (x - x_{i+l}) (x - x_{i+m})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+2})(x_i - x_{i+3})},$$

$$B_i(x) = \frac{\sum_{l=0}^2 \sum_{\substack{m=l+1 \\ (m \neq 0)}}^3 (x - x_{i+l}) (x - x_{i+m})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2})(x_{i+1} - x_{i+3})}$$

$$C_i(x) = \frac{\sum_{l=0}^2 \sum_{\substack{m=l+1 \\ (m \neq 2)}}^3 (x - x_{i+l}) (x - x_{i+m})}{(x_{i+2} - x_i)(x_{i+2} - x_{i+1})(x_{i+2} - x_{i+3})},$$

$$D_i(x) = \frac{\sum_{l=0}^2 \sum_{\substack{m=l+1 \\ (m \neq 3)}}^3 (x - x_{i+l}) (x - x_{i+m})}{(x_{i+3} - x_i)(x_{i+3} - x_{i+1})(x_{i+3} - x_{i+2})}$$

则 \bar{F} 可以表示为:

$$\begin{aligned} \bar{F} = & \frac{1}{n} [\bar{p}_1(\bar{y}'_1 - \bar{a}_1 y_1 - \bar{b}_1 y_2 - \bar{c}_1 y_3 - \bar{d}_1 y_4)^2 + \\ & \sum_{i=2}^{N/2} \bar{p}_i (\bar{y}'_i - \bar{a}_i y_{i-1} - \bar{b}_i y_i - \bar{c}_i y_{i+1} - \bar{d}_i y_{i+2})^2 + \\ & \sum_{i=N/2+1}^{N/2} \bar{p}_i (\bar{y}'_i - \bar{a}_i y_{i-2} - \bar{b}_i y_{i-1} - \bar{c}_i y_i - \bar{d}_i y_{i+1})^2 + \\ & \bar{p}_N (\bar{y}'_N - \bar{a}_N y_{N-3} - \bar{b}_N y_{N-2} - \bar{c}_N y_{N-1} - \bar{d}_N y_N)^2] \quad (10) \end{aligned}$$

V-C 组合滤波方法旨在确定平滑值 y_i 在3种不同条件下的均衡,每种不同的设置会导致不同的结果:

- (1) 曲线需要被平滑(最小化 S);
- (2) 平滑值需要接近函数的观测值(最小化 F);
- (3) 平滑曲线的一阶导数需要接近于一阶导数的观测值(最小化 \bar{F})。

采用最小二乘法最小化以上约束条件对各参数进行调节,表示为:

$$Q = S + \varepsilon F + \bar{\varepsilon} \bar{F} = \min \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial y_i} = 0, i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

式中: $\varepsilon \geq 0, \bar{\varepsilon} \geq 0, 3$ 种条件的均衡程度可以通过选择这两个参数的值来确定:平滑系数 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 。平滑系数值越大,逼真度相对于观测函数值或者其一阶导数的权值越大,平滑值与观测值越接近。 S 对于 y_i 的偏导数可以简单表示为式(12):

$$\frac{\partial S}{\partial y_i} = 2(a_i \Delta_i + b_{i-1} \Delta_{i-1} + c_{i-2} \Delta_{i-2} + d_{i-3} \Delta_{i-3}) \quad (12)$$

其中

$$\Delta_i = a_i y_i + b_i y_{i+1} + c_i y_{i+2} + d_i y_{i+3}$$

$$a_i = b_i = c_i = d_i = 0, i \leq 0 \text{ 或 } i \geq N - 2$$

函数 F 的偏导为式(13):

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{2p_i(y_i - y'_i)}{n} \quad (13)$$

\bar{F} 的偏导较为复杂,不同的 i 对应不同的表达式。为了简便,随后使用 \bar{y}_i 代替 y_i 。前4部分的偏导数为:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_1} = \frac{2}{n} [\bar{p}_1 \bar{a}_1 (\bar{y}_1 - \bar{y}'_1) + \bar{p}_2 \bar{a}_2 (\bar{y}_2 - \bar{y}'_2)],$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_2} = \frac{2}{n} [\bar{p}_1 \bar{b}_1 (\bar{y}_1 - \bar{y}'_1) + \bar{p}_2 \bar{b}_2 (\bar{y}_2 - \bar{y}'_2) +$$

$$\bar{p}_3 \bar{a}_3 (\bar{y}_2 - \bar{y}'_2)],$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_3} = \frac{2}{n} [\bar{p}_1 \bar{c}_1 (\bar{y}_1 - \bar{y}'_1) + \bar{p}_2 \bar{c}_2 (\bar{y}_2 - \bar{y}'_2) +$$

$$\bar{p}_3 \bar{b}_3 (\bar{y}_3 - \bar{y}'_3) + \bar{p}_4 \bar{a}_4 (\bar{y}_4 - \bar{y}'_4)],$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_4} = \frac{2}{n} [\bar{p}_1 \bar{d}_1 (\bar{y}_1 - \bar{y}'_1) + \bar{p}_2 \bar{d}_2 (\bar{y}_2 - \bar{y}'_2) +$$

$$\bar{p}_3 \bar{c}_3 (\bar{y}_3 - \bar{y}'_3) + \bar{p}_4 \bar{b}_4 (\bar{y}_4 - \bar{y}'_4) + \bar{p}_5 \bar{a}_5 (\bar{y}_5 - \bar{y}'_5)] \quad (14)$$

对于输入数据的前半部分的 \bar{y}_i 偏导的计算, $i = 5, 6, \dots, N/2 - 2$,有

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{i-2} \bar{d}_{i-2} (\bar{y}_{i-2} - \bar{y}'_{i-2}) + \bar{p}_{i-1} \bar{c}_{i-1} (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}'_{i-1}) +$$

$$\bar{p}_i \bar{b}_i (\bar{y}_i - \bar{y}'_i) + \bar{p}_{i+1} \bar{a}_{i+1} (\bar{y}_{i+1} - \bar{y}'_{i+1})] \quad (15)$$

接下来是中心点周围的4个偏导数公式为:

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{\frac{N}{2}-1}} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{\frac{N}{2}-3} \bar{d}_{\frac{N}{2}-3} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-3} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-3}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}-2} \bar{c}_{\frac{N}{2}-2} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-2} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-2}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}-1} \bar{b}_{\frac{N}{2}-1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-1}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}} \bar{a}_{\frac{N}{2}} (\bar{y}_{\frac{N}{2}} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}+1} \bar{a}_{\frac{N}{2}+1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+1})]$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{\frac{N}{2}}} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{\frac{N}{2}-2} \bar{d}_{\frac{N}{2}-2} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-2} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-2}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}-1} \bar{c}_{\frac{N}{2}-1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-1}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}} \bar{b}_{\frac{N}{2}} (\bar{y}_{\frac{N}{2}} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}+1} \bar{b}_{\frac{N}{2}+1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+1}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}+2} \bar{a}_{\frac{N}{2}+2} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+2} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+2})]$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{\frac{N}{2}+1}} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{\frac{N}{2}-1} \bar{d}_{\frac{N}{2}-1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}-1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}-1}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}} \bar{c}_{\frac{N}{2}} (\bar{y}_{\frac{N}{2}} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}+1} \bar{c}_{\frac{N}{2}+1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+1}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}+2} \bar{b}_{\frac{N}{2}+2} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+2} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+2}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}+3} \bar{a}_{\frac{N}{2}+3} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+3} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+3})]$$

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{\frac{N}{2}+2}} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{\frac{N}{2}} \bar{d}_{\frac{N}{2}} (\bar{y}_{\frac{N}{2}} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}+1} \bar{d}_{\frac{N}{2}+1} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+1} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+1}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}+2} \bar{c}_{\frac{N}{2}+2} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+2} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+2}) + \bar{p}_{\frac{N}{2}+3} \bar{b}_{\frac{N}{2}+3} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+3} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+3}) +$$

$$\bar{p}_{\frac{N}{2}+4} \bar{a}_{\frac{N}{2}+4} (\bar{y}_{\frac{N}{2}+4} - \bar{y}'_{\frac{N}{2}+4})] \quad (16)$$

对于输入数据的后半部分的 \bar{y}_i 偏导的计算, $i = N/2 + 3, N/2 + 4, \dots, N - 4$,有

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial y_i} = \frac{2}{n} [\bar{p}_{i-1} \bar{d}_{i-1} (\bar{y}_{i-1} - \bar{y}'_{i-1}) + \bar{p}_i \bar{c}_i (\bar{y}_i - \bar{y}'_i) +$$

$$\bar{p}_{i+1}\bar{b}_{i+1}(\bar{y}_{i+1} - \bar{y}'_{i+1}) + \bar{p}_{i+2}\bar{a}_{i+2}(\bar{y}_{i+2} - \bar{y}'_{i+2})] \quad (17)$$

最后 4 个点偏导数为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{N-3}} &= \frac{2}{n}[\bar{p}_{N-4}\bar{d}]_{N-4}(\bar{y}_{N-4} - \bar{y}'_{N-4}) + \bar{p}_{N-3}\bar{c}_{N-3}(\bar{y}_{N-3} - \bar{y}'_{N-3}) \\ &+ \bar{p}_{N-2}\bar{b}_{N-2}(\bar{y}_{N-2} - \bar{y}'_{N-2}) + \bar{p}_{N-1}\bar{a}_{N-1}(\bar{y}_{N-1} - \bar{y}'_{N-1}) + \bar{p}_N\bar{a}_N(\bar{y}_N - \bar{y}'_N)] \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{N-2}} &= \frac{2}{n}[\bar{p}_{N-3}\bar{d}_{N-3}(\bar{y}_{N-3} - \bar{y}'_{N-3}) + \bar{p}_{N-2}\bar{c}_{N-2}(\bar{y}_{N-2} - \bar{y}'_{N-2}) \\ &+ \bar{p}_{N-1}\bar{b}_{N-1}(\bar{y}_{N-1} - \bar{y}'_{N-1}) + \bar{p}_N\bar{b}_N(\bar{y}_N - \bar{y}'_N)] \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_{N-1}} &= \frac{2}{n}[\bar{d}_{N-2}\bar{c}_{N-2}(\bar{y}_{N-2} - \bar{y}'_{N-2}) + \bar{p}_{N-1}\bar{c}_{N-1}(\bar{y}_{N-1} - \bar{y}'_{N-1}) \\ &+ \bar{p}_N\bar{c}_N(\bar{y}_N - \bar{y}'_N)] \\ \frac{\partial \bar{F}}{\partial y_N} &= \frac{2}{n}[\bar{p}_{N-1}\bar{d}_{N-1}(\bar{y}_{N-1} - \bar{y}'_{N-1}) + \bar{p}_N\bar{d}_N(\bar{y}_N - \bar{y}'_N)] \end{aligned} \quad (18)$$

2 V-C 滤波融合关键参数选取和验证

2.1 关键参数选取

V-C 组合滤波主要完成 3 种不同条件的折中,不同平滑因子的设置会导致不同的结果。式(11)中 ε 是观测函数 F 的平滑因子, $\bar{\varepsilon}$ 是一阶导数 \bar{F} 的平滑因子,二者皆大于或等于 0。当 $\varepsilon = 0, \bar{\varepsilon} \neq 0$ 时,即仅存在观测序列 2 一阶导数的情况下,式(11)没有唯一解,这时需要增加附加条件对式(11)来进行求解。例如,平滑曲线至少经过一个确定点,该点为一个非 0 权的观测值。当 $\varepsilon \neq 0, \bar{\varepsilon} = 0$ 时,相当于仅存在观测序列 1 而其观测序列 2 不存在的情况下,这便是将联合平滑转变回初始平滑而已。当 $\varepsilon = 0, \bar{\varepsilon} = 0$ 时,此时没有限制条件,任何二次抛物线都可以满足式(11),有绝对的自由来选择 3 个附加的限制条件。例如,选择曲线上任意 3 点,然后进行观测序列 1 的二次回归或者对于观测序列 1 和观测序列 2 一阶导数进行联合回归。

这里采用频率响应法确定 ε 和 $\bar{\varepsilon}$,如式(19)所示。该式体现的是平滑因子 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 、周期 P 以及频率响应 T 和 T' 之间的关系,其中, $0 \leq T \leq 1, 0 \leq \bar{T} \leq 1$ 。表 1 给出了平滑因子 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 与频率响应 T 和 T' 以及周期 P 的关系。

$$\varepsilon = \frac{(2\pi f)^6 T}{1 - T}, \bar{\varepsilon} = \frac{(2\pi f)^4 T'}{1 - T'} \quad (19)$$

由表 1 可看出,当 P 不变时, ε 随着 T 的增加而增大;而当 T 不变时, ε 随着 P 的增大而减小($\bar{\varepsilon}$ 同)。如已

知各信号想要抑制的频率,那么可利用式(19)来估计平滑因子 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 。此时,V-C 联合平滑方法相当于一个低通滤波器。例如,确定想要抑制信号的周期为一半周期 $P_{0.5}$,这就相当于 $T = T' = 0.5$,此时更短周期的信号被抑制。图 1 和 2 所示分别为滤波器频率响应函数 T 和 T' 与平滑因子 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 周期为 $P = 1$ d 的关系图。如果需要抑制信号的频率或者周期已知,那么可以固定该参数,同时调节 T, T' 和 $\varepsilon, \bar{\varepsilon}$ 的值来确定它们的最佳联合,形成 3 个条件最优的折中。氢铯融合守时目标是将铯钟组时间尺度和氢钟组时间尺度进行融合,铯钟短期波动较大,在 1 d 内主要表现为白噪声^[18-19]。为确定需抑制噪声周期 P ,将铯钟组时间尺度序列采用傅里叶变换方法转化到频域^[20],并经谱分析,选择合适的周期为 0.5 d。因此,对于铯钟组时间尺度取 $T = 0.3$,氢钟组时间尺度取 $T' = 0.99$ 。另外,该方法对于输入的两类数据序列均可根据已知的不确定度在每个时刻取权,假设文中所用数据不确定度相同,所有数据权值相等。

表 1 频率响应(T 和 T')与平滑因子(ε 和 $\bar{\varepsilon}$)和周期 P 的关系
Table 1 Relation between frequency responses (T and T') and smoothing factor (ε and $\bar{\varepsilon}$) and period P

| 项目 | T/T' | | | | | |
|---------|---------------------|---------|-----------|-----------|------------|-------------|
| | 0.10 | 0.30 | 0.50 | 0.80 | 0.99 | |
| $P=0.5$ | ε | 438 000 | 1 690 000 | 3 940 000 | 15 800 000 | 390 000 000 |
| | $\bar{\varepsilon}$ | 2 770 | 10 700 | 24 900 | 99 700 | 2 470 000 |
| $P=1$ | ε | 6 840 | 26 400 | 61 500 | 246 000 | 6 090 000 |
| | $\bar{\varepsilon}$ | 173 | 668 | 1 560 | 6 230 | 154 000 |
| $P=5$ | ε | 0.438 | 1.69 | 3.94 | 15.8 | 390 |
| | $\bar{\varepsilon}$ | 0.277 | 1.07 | 2.49 | 9.97 | 247 |

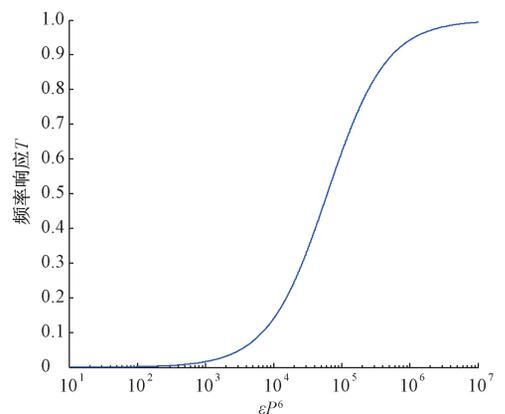


图 1 频率响应 T 与 εP^6 关系

Fig.1 Frequency response T for the measured function values, plotted as function of εP^6

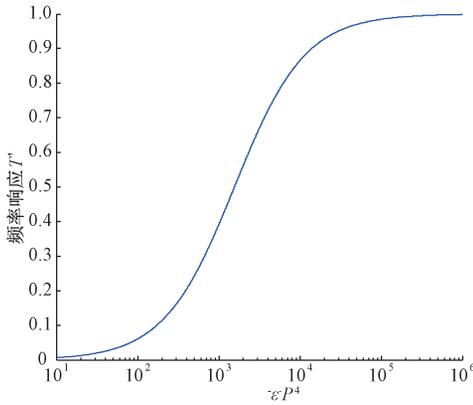
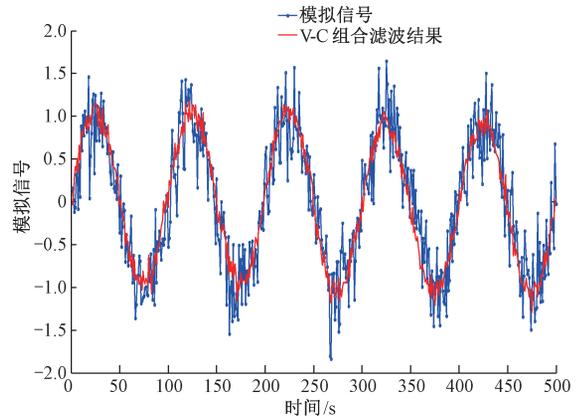
图2 频率响应 T' 与 $\bar{\varepsilon}P^4$ 关系Fig.2 Frequency response T' for the measured function values, plotted as function of $\bar{\varepsilon}P^4$ 

图3 模拟信号 1 及组合滤波结果

Fig.3 Analog signal 1 and combined filter result

2.2 模拟数据验证与分析

任何平滑方法都类似于单边滤波器,最佳平滑度的选择实质上选择一个合适的截断频率,以保证信号中的有用信息最大限度留下来。为验证 V-C 组合滤波方法的有效性,选择单频周期信号加上正态随机噪声的简单模型来对其进行验证,模型具体描述为式(20):

$$y = \sin(2\pi t/P1) + e(t) \quad (20)$$

式中: $e(t)$ 是随机噪声(正态白噪声); $P1$ 是模拟信号的周期,这里选择 $P1 = 100$ s。模拟数据序列 1 噪声水平设定为 0.3,无频率漂移。模拟数据序列 2 输入噪声水平设定 0.1,频率漂移率 $3 \times 10^{-16}/d$ 。依据模拟数据特征,验证时选择频率响应 $T = 0.1$, $T' = 0.935$ 。由式(19)计算得平滑参数分别取 $\varepsilon = 6\ 840$, $\bar{\varepsilon} = 154\ 000$ 。

采用 V-C 联合平滑方法进行计算,结果如图 3 所示。所有数据的平滑既要考虑结果曲线的平滑度,也要考虑相对观测数据的一致性。平滑过度会导致缺失原始数据信息。这里采用观测数据与最佳平滑曲线之间的标准差(RMSE)对联合平滑结果进行评估。RMSE 越小,观测值和平滑值越接近,其计算公式为式(21)。图 4 给出了联合平滑结果与原始数据的残差及残差分布图。

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y'_i - y_i)^2} \quad (21)$$

在图 4 中,上述模拟数据联合平滑结果的 $RMSE = 0.28$ 。与模拟数据序列 1 的输入噪声的水平基本一致。从图 4 可看出联合平滑结果与模拟数据序列 1 的残差大多在 0 周围波动,且残差符合正态分布,与输入白噪声一致。这表明该平滑因子是最佳的平滑因子,在减弱噪声的同时也尽可能地保留了信号的真实性。

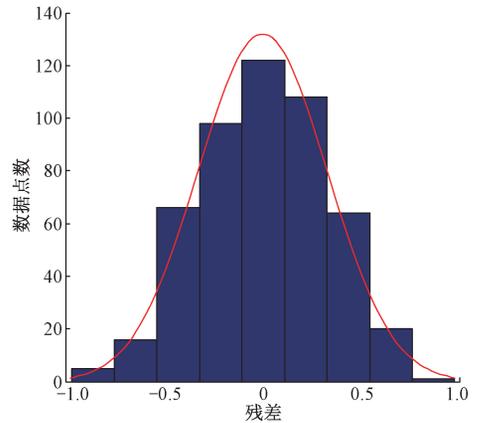


图4 组合滤波结果与模拟信号 1 的残差分布

Fig.4 Residual distribution of combined filter results and analog signal 1

3 算法实现与结果分析

3.1 算法设计

选取 3 台氢原子钟和 3 台铯原子钟分别构成两类原子钟钟组,基于 Fortran 语言开发了 V-C 组合滤波时间尺度融合计算系统,实现了氢和铯时间尺度层面的融合并对其结果进行了性能评估。实验平台见图 5。V-C 组合滤波的氢铯融合时间尺度算法实现主要分为 5 个步骤:铯钟组时间尺度计算、氢钟组时间尺度计算、氢钟组时间尺度频率计算、频率响应 T/T' 和平滑因子 $\varepsilon/\bar{\varepsilon}$ 的选择、V-C 联合平滑方法的氢铯时间尺度融合及结果评估。

1) 将 3 台氢钟和 3 台铯钟的钟差数据分别经滤波器设计、钟差预测、频率估计及权重估计等步骤产生 AT1 的铯钟组时间尺度和氢钟组时间尺度。

2) 将氢钟组时间尺度进行一次差分,计算其频率数据。

3) 根据所需减弱噪声的频率或周期,确定频率响应 T/T' , 并利用式(21)计算平滑因子 ε 和 $\bar{\varepsilon}$ 。

4) 将铯钟组时间尺度和氢钟组时间尺度频率数据作为输入,将步骤 3) 确定的平滑因子用于 V-C 联合平滑方法,产生联合平滑结果,实现铯钟组和氢钟组时间尺度的融合。

5) 对时间尺度融合结果采用均方根误差评估与观测数据的逼真度,利用阿伦偏差 (ADEV) 来评估融合后时间尺度的稳定度。



图 5 实验平台
Fig.5 Experimental platform

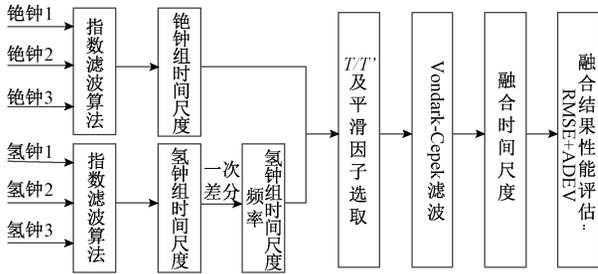


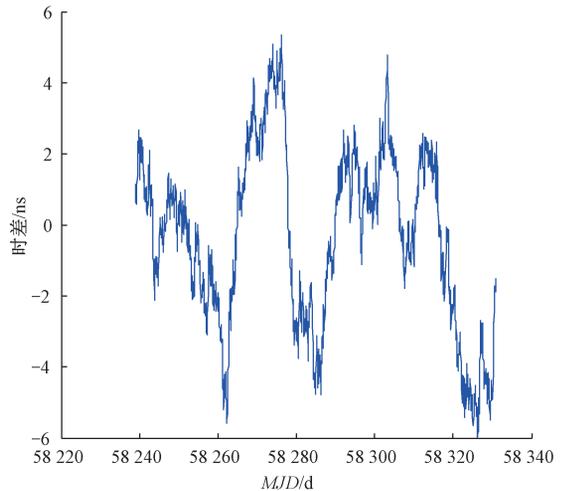
图 6 V-C 组合滤波时间尺度融合算法

Fig.6 Flowchart of V-C combination filter time scale algorithm design

3.2 氢铯时间尺度融合结果与性能评估

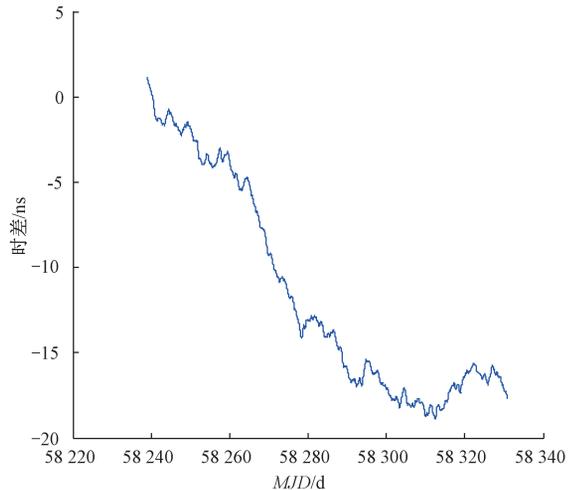
以中科院国家授时中心时间频率基准实验室高性能原子钟为研究对象,任选 3 台氢钟和 3 台铯钟。3 台氢钟分别命名为 1 号氢钟、2 号氢钟和 3 号氢钟,而 3 台铯钟分别命名为 1 号铯钟、2 号铯钟和 3 号铯钟。实验选择 2018 年 5 月 1 日 ($MJD = 58\ 239$) 到 7 月 31 日 ($MJD = 58\ 330$) 的原子钟测量数据进行计算。首先,将 3 台铯原子钟和 3 台氢原子钟分别经 AT1 时间尺度算法计算产生铯钟组时间尺度 TA_{Cs} 和氢钟组时间尺度 TA_H , 如图 7 所示。铯钟组时间尺度短期波动较大,而长稳性能较好;氢

钟组时间尺度短期性能良好,但 3 个月的漂移较大,这符合 V-C 组合滤波理论模型。然后,根据 V-C 组合滤波方法建立氢铯融合时间尺度,频率响应和平滑参数按 3.1 节选取, $T=0.3$, $T'=0.99$, $\varepsilon=1\ 690\ 000$, $\bar{\varepsilon}=2\ 470\ 000$, 其结果如图 8 所示,图 9 给出了铯钟组时间尺度与 V-C 组合滤波氢铯融合时间尺度之间的残差分布。从图 9 可看出,V-C 组合滤波结果时间尺度与 TA_{Cs} 趋势一致,且根据式(21)得 $RMSE=0.12$,这说明 V-C 组合滤波结果能够保留 TA_{Cs} 的客观信息,具有高保真度。从图 10 可得,铯钟组时间尺度相对于 V-C 氢铯融合结果时间尺度残差在 0 值上下波动,而且残差服从正态分布,符合白噪声性质。



(a) 铯钟组时间尺度

(a) Time scale of the ensemble of Cesium atomic clocks



(b) 氢钟组时间尺度

(b) Time scale of the ensemble of Hydrogen masers

图 7 两种时间尺度

Fig.7 Two kinds of time scale

为验证 V-C 组合滤波氢铯融合时间尺度的性能,本文也与基于 AT1 和 ALGOS 方法的氢铯联合时间尺度进

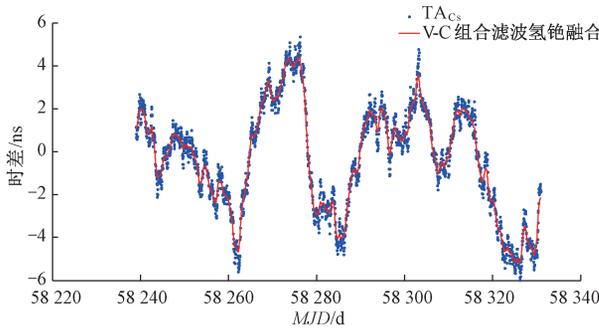


图8 V-C 组合滤波氢铯时间尺度融合与 TA_{Cs}

Fig.8 V-C combined filter and TA_{Cs}

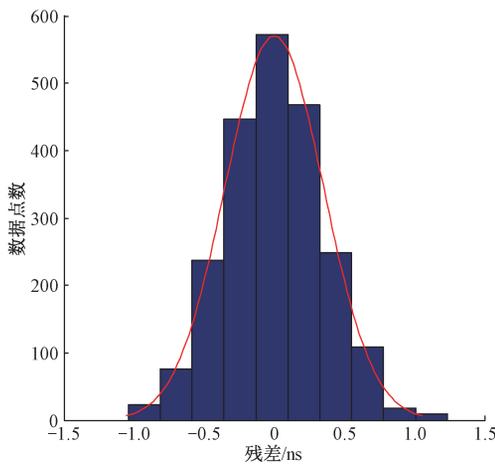


图9 V-C 组合滤波氢铯时间尺度融合与 TA_{Cs} 的残差分布

Fig.9 Residual distribution of V-C combined filtering and TA_{Cs}

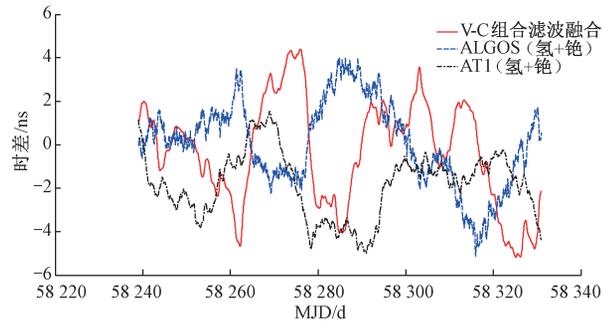


图10 3种方法时间尺度结果对比

Fig.10 Comparison of time scales of three methods

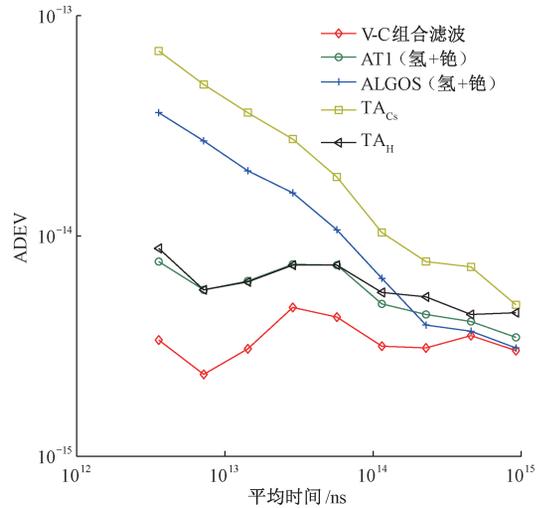


图11 V-C 组合滤波、AT1(氢+铯)、ALGOS(氢+铯)、 TA_{Cs} 及 TA_H 的阿伦偏差

Fig.11 Allan deviation of V-C combined filtering, AT1 (Hydrogen+Cesium), ALGOS (Hydrogen +Cesium), TA_{Cs} and TA_H

行了比较分析,结果如图10所示。首先经最小二乘的二次拟合方法估计每台氢原子钟频漂项,将铯原子钟和去除频漂后的氢原子钟构成守时钟组,最后分别采用AT1和ALGOS算法产生两种方法的氢铯联合时间尺度。上述5种时间尺度V-C氢铯融合、AT1氢铯联合、ALGOS氢铯联合与 TA_{Cs} 及 TA_H 的阿伦偏差见图11和表2。综合图10和表2,V-C组合滤波时间尺度曲线明显较AT1和ALGOS方法产生的氢铯时间尺度曲线更加平滑。从图11和表2可知,V-C组合滤波时间尺度在1h稳定度为 3.36×10^{-15} ,15d的稳定度为 3×10^{-15} ,均小于AT1(氢+铯)时间尺度、ALGOS(氢+铯)时间尺度、铯钟组时间尺度和氢钟组时间尺度相应指标。也就是说,V-C组合滤波时间尺度稳定度均优于两种类型的原子钟各自产生的时间尺度和两种经典加权平均方法时间尺度的稳定度指标。由上可见,V-C组合滤波方法能有效的利用氢钟的短期稳定度来增强铯原子钟组时间尺度的性能,可以融合产生长期稳定度都更优的时间尺度。

表2 V-C 组合滤波、AT1(氢+铯)、ALGOS(氢+铯)、 TA_{Cs} 及 TA_H 的稳定度

Table 2 Stability of V-C, AT1, ALGOS, TA_{Cs} and TA_H

| 平均时间/ns | ADEV | | | | |
|-----------------------|------------------------|------------------------|--------------------------|--------------------------|------------------------|
| | V-C 组合滤波 | AT1 (氢+铯) | ALGOS (氢+铯) | TA_{Cs} | TA_H |
| 3.60×10^{12} | 3.36×10^{-15} | 7.62×10^{-15} | 3.62×10^{-14} | 6.869×10^{-14} | 8.73×10^{-15} |
| 7.20×10^{12} | 2.34×10^{-15} | 5.68×10^{-15} | 2.69×10^{-14} | 4.8631×10^{-14} | 5.66×10^{-15} |
| 1.44×10^{13} | 3.05×10^{-15} | 6.21×10^{-15} | 1.96×10^{-14} | 3.6229×10^{-14} | 6.18×10^{-15} |
| 2.88×10^{13} | 4.72×10^{-15} | 7.41×10^{-15} | 1.56×10^{-14} | 2.7464×10^{-14} | 7.37×10^{-15} |
| 5.76×10^{13} | 4.25×10^{-15} | 7.35×10^{-15} | 1.06×10^{-14} | 1.8451×10^{-14} | 7.36×10^{-15} |
| 1.15×10^{14} | 3.15×10^{-15} | 4.88×10^{-15} | 6.37×10^{-15} | 1.0319×10^{-14} | 5.53×10^{-15} |
| 2.30×10^{14} | 3.08×10^{-15} | 4.39×10^{-15} | 3.9311×10^{-15} | 7.6027×10^{-15} | 5.29×10^{-15} |
| 4.61×10^{14} | 3.52×10^{-15} | 4.08×10^{-15} | 3.6676×10^{-15} | 7.2179×10^{-15} | 4.37×10^{-15} |
| 9.22×10^{14} | 3.00×10^{-15} | 3.45×10^{-15} | 3.0831×10^{-15} | 4.8499×10^{-15} | 4.48×10^{-15} |

4 结 论

氢铯联合守时主要是利用两类不同原子钟的有效组合产生长短稳更好的时间尺度。本文提出了基于氢钟组和铯钟组的 V-C 组合滤波时间尺度层面的融合,首先对 V-C 组合滤波的算法原理进行了详细的介绍并利用仿真数据对其进行了验证;然后选取了 3 台氢原子钟和 3 台铯原子钟计算了 V-C 组合滤波氢铯融合时间尺度;最后,将不同的时间尺度算法计算结果与 V-C 组合滤波氢铯融合时间尺度进行了比较与评估。实验数据的计算结果表明:V-C 组合滤波方法有效利用氢钟的优良短期稳定度对铯原子钟时间尺度进行了平滑,在减弱噪声的同时保证了铯钟组时间尺度的逼真度。

参考文献

- [1] LEVINE J. Invited review article: the statistical modeling of atomic clocks and the design of time scales[J]. *Review of Scientific Instruments*, 2012, 83(2): 1101-1128.
- [2] 宋会杰,董绍武,屈俐刚,等. 基于 Sage 窗的自适应 Kalman 滤波用于钟差预报研究[J]. *仪器仪表学报*, 2017, 38(7):1809-1816.
- SONG H J, DONG SH W, QU L L, et al. Research on clock difference prediction using adaptive Kalman filter based on sage window[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2017, 38(7):1809-1816.
- [3] STEVEN P, JAMES L H, THOMAS B S, et al. Evaluation of long term performance of continuously running atomic fountains[J]. *Metrologia*, 2014, 51(3): 263-269.
- [4] YUAN H B, QU L L, DONG SH W, et al. The hydrogen maser and cesium clocks in time keeping at NTSC[C]. *IEEE Frequency Control Symposium Joint with the 22nd European Frequency and Time forum*, 2009: 639-642.
- [5] SHINN Y L. The new TA (TL) model composited by hydrogen maser and cesium clock ensembles [C]. *Proceedings of the 2019 Precise Time and Time Interval Meeting*, 2019: 284-289.
- [6] SUMAN S, PASCALE D. Generation of new time scale at ROB: combination of cesium clocks and hydrogen masers[C]. *Proceedings of Conference on Precision Electromagnetic Measurements*, 2010:454-455.
- [7] 宋会杰,董绍武,姜萌,等.一种基于小波变换的氢铯联合守时算法研究[J]. *天文学报*, 2018, 59(1): 48-57.
- SONG H J, DONG SH W, JIANG M, et al. An algorithm research based on wavelet transforms about hydrogen masers and cesium clocks in time keeping [J]. *Acta Astronomica Sinica*, 2018, 59(1):48-57.
- [8] 刘娟花,柯熙政. 关于小波分解原子时算法的有效性[J]. *仪器仪表学报*, 2015, 36(12):2857-2866.
- LIU J H, KE X ZH. Effectiveness of the wavelet decomposition atomic time algorithm[J]. *Chinese Journal of Scientific Instrument*, 2015, 36(12):2857-2866.
- [9] LEVINE J. Realizing UTC (NIST) at a remote location[J]. *Metrologia*, 2008, 45(6): S23-S33.
- [10] ARIAS E F, PANFILO G, PETIT G. Timescales at the BIPM[J]. *Metrologia*, 2011, 48(4): S145-S153.
- [11] VONDRÁK J, ČEPEK A. Combined smoothing method and its use in combining earth orientation parameters measured by space techniques [J]. *Astron. Astrophys. Suppl.* 2000, 147(2):347-359.
- [12] CEPEK A, VONDRAK J. Covariances of smoothed observational data[J]. *Acta Polytechnica*, 2000, 40(5): 42-44.
- [13] VONDRÁK J, CEPEK A. On the use of the method of combined smoothing to combine EOP data from different techniques[C]. *J2000, a fundamental epoch for origins of reference systems and astronomical models*, 2001: 252-259.
- [14] VONDRÁK J. A contribution to the problem of smoothing observational data [J]. *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia*, 1969, 20(6):349.
- [15] JIANG Z, PETIT G. Combination of TWSTFT and GNSS for accurate UTC time transfer[J]. *Metrologia*, 2009, 46(3):305-314.
- [16] JIANG M, DONG SH W, WU W J, et al. Study on time scale algorithm of hydrogen maser based on minimum error theory[C]. *2018 EFTF*, 2018:217-220.
- [17] WEISS M A, ALLAN D W, PEPLER T K. A study of the NBS time scale algorithm [J]. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 1989, 38(2): 631-635.
- [18] 赵书红. UTC(NTSC)控制方法研究[D]. 西安:中国科学院研究生院(国家授时中心), 2014.
- ZHAO SH H. Research on steering strategy for UTC

(NTSC) [D]. Xi'an: National Time Service Center, Chinese Academy of Sciences, 2014.

- [19] SHIN M Y, PARK C, LEE S J, et al. Atomic clock error modeling for GNSS software platform [C]. IEEE Frequency Control Symposium, 2008:71-76.
- [20] 白旭, 胡辉. 基于快速傅里叶变换和互相关的多频微弱信号重构法[J]. 电子测量与仪器学报, 2019, 33(3):168-175.
- BAI X, HU H. Waveform reconstruction algorithm for multi-frequency weak signal based on FFT and correlation[J]. Journal of Electronic Measurement and Instrumentation, 2019, 33(3):168-175.

作者简介



姜萌, 2013 年于西安工程大学获得学士学位, 2016 年于西安工程大学获得硕士学位, 现为中科院国家授时中心博士研究生, 主要研究方向为时间保持技术与方法和数据处理方法。

E-mail: m13259460281@163.com

Jiang Meng received her B.Sc. degree and M.Sc. degree both from Xi'an Polytechnic University in 2013 and 2016. She is currently a Ph.D. candidate at National Time Service Center of Chinese Academy of Sciences. Her main research interests include timekeeping techniques and data processing.



董绍武(通信作者), 1983 年于西安电子科技大学获得学士学位, 2007 年于中科院研究生院获得博士学位, 现为中科院国家授时中心研究员, 博士生导师, 主要研究方向为标准时间的产生与保持(守时)技术、GNSS 时间等。

E-mail: sdong@ntsc.ac.cn

Dong Shaowu (Corresponding author) received his B.Sc. degree from Xidian University in 1983, and received his Ph.D. degree from The Graduate University of CAS in 2007. He is currently a researcher and Ph.D. supervisor at National Time Service Center of Chinese Academy of Sciences. His main research interests include timekeeping technique, GNSS time, etc.